

Andrzej Trautman
Instytut Fizyki Teoretycznej UW
Hoża 69, 00-681 Warszawa

MODELE MATEMATYCZNE W FIZYCE CZASOPRZESTRZENI

Streszczenie

WSTĘP

Pojęcie czasoprzestrzeni pojawiło się w teorii względności Einsteina, ale czas i przestrzeń stanowią jedność już w fizyce Galileusza.

Aspekty fizyczne nie wyczerpują pojęcia czasu i przestrzeni: są ważne aspekty biologiczne, psychologiczne, filozoficzne, teologiczne i inne.

Fizyka teoretyczna zajmuje się *modelami matematycznymi czasoprzestrzeni* i nie odpowiada na pytanie „jaka naprawdę jest czasoprzestrzeń”. Zajmuje się natomiast tym, jaki model matematyczny najlepiej nadaje się do opisu rozpatrywanych zjawisk.

Do niedawna przyjmowano, że modele czasoprzestrzeni są zbiorami, których elementy to punkty przedstawiające elementarne zdarzenia. Zbiory te posiadają *dotatkową strukturę*, określającą istotne cechy modelu.

Inaczej jest w modelach opartych na geometrii nieprzemiennej i grupach kwantowych (A. Connes, V.G. Drinfeld, Yu. I. Manin, S.L. Woronowicz, M.Heller i ich uczniowie; zob. [4] i cytowaną tam literaturę). W teoriach tych obiektem podstawowym jest pewna nieprzemieniana algebra, a przestrzeń występuje niejako wirtualnie. Modele te stanowią coś zupełnie nowego; gdyby okazały się przydatne do opisu zjawisk fizycznych, oznaczyłoby to przełom w rozwoju nauki większy niż powstanie teorii względności.

PODSTAWOWE STRUKTURY

Topologia pozwala na wprowadzenie pojęcia ciągłości funkcji i zbieżności ciągów; zwykle zakłada się aksjomat Hausdorffa o rozdzielaniu punktów i przyjmuje, że przestrzeń ma strukturę parazwartej rozmaitości topologicznej; już tu pojawia się pojęcie *wymiaru*.

Struktura różniczkowa umożliwia rozpatrywanie równań różniczkowych w przestrzeni; od czasu Newtona wiemy, że takie równania są najlepszym sposobem ujęcia podstawowych praw fizyki. Struktura różniczkowa na rozmaitości M oznacza podanie maksymalnego atlasu map parami zgodnych w klasie C^k ; jeśli $k = \infty$ ($k = \omega$), to mówimy, że M ma strukturę

gładką (analityczną). W fizyce, w teoriach fenomenologicznych, rozkład materii (np. jej gęstość) opisuje się przy pomocy funkcji „kawałkami” ciągłych; z tego względu Lichnerowicz zaleca używanie w ogólnej teorii względności (OTW) rozmaitości kawałkami klasy C^2 [3]. Klasa analityczna wydaje się być odpowiednia do opisu zjawisk mikroskopowych.

Struktury afiniczne i metryczne dokładniej określają charakter modelu; zostaną one nieco dokładniej omówione w dalszej części niniejszego tekstu.

Warto zwrócić uwagę na to, że także teorie kwantowe i nowe teorie „superstrun” za podstawę biorą takie klasyczne modele czasoprzestrzeni; stanowi to o sile i słabości fizyki teoretycznej. Siła wynika z szerokiej, sprawdzonej stosowności i użyteczności struktur geometrycznych, takich jak pola tensorowe i spinorowe, oraz możliwości zapisu praw fizyki w postaci równań różniczkowych. Słabość jest konsekwencją tego, że klasyczne modele czasoprzestrzeni ekstrapolują te struktury na dowolnie małe odległości, niedostępne obserwacjom i doświadczeniom. Powoduje to, m. in., występowanie w obliczeniach, dotyczących zjawisk fizycznych, nieskończoności (rozbieżności), które w kwantowej teorii pola elektromagnetycznego i innych teorii pól z cechowaniem, są usuwane przy pomocy mało zadowalającego procesu renormalizacji.

KONEKSJA AFINICZNA (LINIOWA)

Nie można porównywać wektorów zaczepionych w różnych punktach rozmaitości pozbawionej dodatkowych struktur. Aby móc to robić, a więc i różniczkować pola tensorowe, należy rozmaitość zaopatrzyć w *koneksję liniową* (afiniczną). Jeśli pominąć grawitację, to ruchy swobodne ciał określają w czasoprzestrzeni trywialną – o znikającej krzywiznie – koneksję i nadają jej strukturę *przestrzeni afinicznej*.

Spadków swobodnych w polu grawitacyjnym nie można zrealizować jako linii prostych w geometrii afinicznej: pojawia się nietrywialna koneksja ω i odpowiadająca jej pochodna kowariantna ∇ , także w teorii grawitacji Newtona: istotną częścią tej koneksji jest gradient potencjału grawitacyjnego; zob. np. [1, 5].

STRUKTURY METRYCZNE

W teorii Galileusza i Newtona występują dwie struktury „metryczne”: czas absolutny t i geometria euklidesowa w przestrzeniach $t = \text{const}$. Oba

elementy są absolutne w dwóch znaczeniach: nie zależą od obserwatorów i nie podlegają żadnym dynamicznym równaniom ruchu.

W teoriach relatywistycznych występuje tylko jedna struktura metryczna: pole tensora g o sygnaturze lorentzowskiej; do niektórych celów (np. do zapisu równań Maxwella w próżni) wystarcza słabsza geometria konforemna o tej sygnaturze. Tensor metryczny g jest absolutny w szczególnej teorii względności. W OTW jest „dynamiczny” w tym sensie, że podlega równaniom Einsteina.

Zwykle zakłada się zgodność koneksji liniowej ze strukturą metryczną, co oznacza, że obiekty opisujące tę strukturę nie zmieniają się pod wpływem przenoszenia równoległego określonego przez koneksję. W teoriach relatywistycznych warunek zgodności sprowadza się do warunku metryczności koneksji, $\nabla g = 0$.

TEORIA EINSTEINA–CARTANA

W 1923 r. Élie Cartan [1] nieco uogólnił teorię grawitacji Einsteina, dopuszczając koneksje liniowe o nieznikającym skręceniu $Q_{\nu\rho}^{\mu}$. Równania pola grawitacyjnego otrzymuje się z zasady wariacyjnej, opartej na funkcji Lagrange’a będącej sumą składowej Ricciego i funkcji Lagrange’a materii. Równanie Cartana wiąże skręcenie z gęstością spinu; jeśli ta gęstość znika, to $Q = 0$ i równanie pola grawitacyjnego sprowadza się do równania Einsteina, a czasoprzestrzeń ma geometrię Riemanna z g o sygnaturze lorentzowskiej. W klasycznej OTW Einsteina od razu zakłada się $Q = 0$. Teoria Einsteina dostarcza wielu modeli czasoprzestrzeni (np. kosmologicznych), tłumaczy sporo zjawisk i przewiduje nowe (czarne dziury, promieniowanie grawitacyjne). Uogólnienie Cartana nie doprowadziło do żadnych potwierdzonych przewidywań, co wynika stąd, że ewentualny wpływ spinu na zjawisku grawitacyjne wymaga bardzo dużych gęstości materii ze skorelowanymi spinami. Teoria Einsteina–Cartana jest atrakcyjna ze względu na jej prostą strukturę logiczną i geometryczną; zob. [7] i cytowaną tam literaturę.

TEORIE JEDNOLITE

Teoria Weyla opiera się na geometrii z koneksją liniową bez skręcenia i klasie równoważności par (g, A) , gdzie $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ i $\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = A_{\mu} g_{\nu\rho}$, a dwie pary (g, A) i (g', A') są równoważne wtedy, i tylko wtedy, jeśli połączone są przekształceniem cechowania, tzn. jeśli istnieje funkcja f taka, że $g' = e^f g$ i $A' = A + df$. Weyl chciał utożsamić A z potencjałem pola elektromagne-

tycznego. Ta próba unifikacji grawitacji i elektromagnetyzmu okazała się nieudana, ale zapoczątkowała rozwój teorii z cechowaniem.

Teoria Kaluzy–Kleina zakłada 5-wymiarową rozmaitość P z geometrią Riemanna, dopuszczającą jednowymiarową grupę izometrii o orbitach dyfeomorficznych z okręgiem. Czasoprzestrzeń M utożsamia się z czterowymiarową przestrzenią orbit. Zasada wariacyjna, oparta na skalarze Ricciego przestrzeni P , prowadzi do układu równań Einsteina–Maxwella. Geodezyjne w P rzutują się na linie świata ruchów cząstek naładowanych w czasoprzestrzeni.

Nowoczesne, ogólne ujęcie tej teorii opiera się na wiązce głównej

$$G \rightarrow P \rightarrow M$$

z koneksją; G jest zwartą grupą Liego. Metryka Riemanna na M , wraz z niezmienniczym iloczynem skalarnym na algebrze Liego grupy G (jest to forma Maurera–Cartana jeśli G jest półprosta) określa metrykę Riemanna g na P ; obliczając wariacje całki działania opartej na $R(g)$ otrzymuje się równania Yanga–Millsa i równania Einsteina z bardzo dużą stałą kosmologiczną (chyba, że G jest abelowa).

OSOBLIWOŚCI W OTW

W geometrii Riemanna z dodatnio określonym g zupełność geodezyjna i metryczna (zbieżność ciągów Cauchy’ego) są równoważne; tak nie jest w geometrii Lorentza: istnieją przykłady zwartych rozmaitości Lorentza, które nie są geodezyjnie zupełne; zob. np. zadanie 2 na str. 242 w [8]. W związku z tym, w geometrii Lorentza nie jest łatwo określić, co należy rozumieć przez osobliwość. Nieformalne definicje osobliwości: modele z krzywizną zmierzającą do ∞ , modele w istotny sposób niezupełne. Ważne przykłady: osobliwości modeli kosmologicznych, osobliwości powstające w wyniku zapadania się materii i powstawania czarnych dziur. Przez pewien czas sądzono, że osobliwości te powstają w związku z wysoką symetrią tych modeli. Twierdzenia Penrose’a i Hawkinga pokazują jednak, że powstawanie osobliwości jest ogólną cechą czasoprzestrzeni, w których duża gęstość materii powoduje powstawanie „powierzchni złapanych” [2, 6].

Jakie znaczenie ma powstawanie osobliwości? Stanowi ono pewnego rodzaju wyzwanie, gdyż wskazuje na granice stosowalności OTW. W związku z tym rysują się różne stanowiska:

1. OTW trzeba poprawić na poziomie klasycznym;

2. rozwiązanie problemu osobliwości wymaga uwzględnienia zjawisk kwantowych;

3. należy zastąpić różniczkowe różniczkowe innymi modelami czasoprzestrzeni.

Według Penrose'a, czekając na dalszy rozwój teorii, nie należy przejmować się występowaniem osobliwości w wyniku zapadania grawitacyjnego, bo takie osobliwości, na skutek powstawania „horyzontu zdarzeń”, nie mogą być obserwowane z zewnątrz (hipoteza cenzury kosmicznej).

LITERATURA

- [1] É. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée I & II, *Ann. Éc. Norm.* **40** (1923) 325–412 & **41** (1924) 1–25.
- [2] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1973.
- [3] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris 1955.
- [4] Yu. I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Université de Montréal, Montréal 1988.
- [5] W. Kopczyński, A. Trautman, *Spacetime and gravitation*, PWN, Warszawa 1992.
- [6] R. Penrose, *Techniques of differential topology in relativity*, Soc. for Industrial and Appl. Mathematics, Philadelphia 1972.
- [7] A. Trautman, Gauge and optical aspects of gravitation, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) A157–A175.
- [8] R. M. Wald, *General relativity*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1984.

Przełomowe odkrycia i koncepcje po II wojnie światowej

Ogólna Teoria Względności i Czarne Dziury

JEAN-PIERRE LASOTA I ANDRZEJ TRAUTMAN

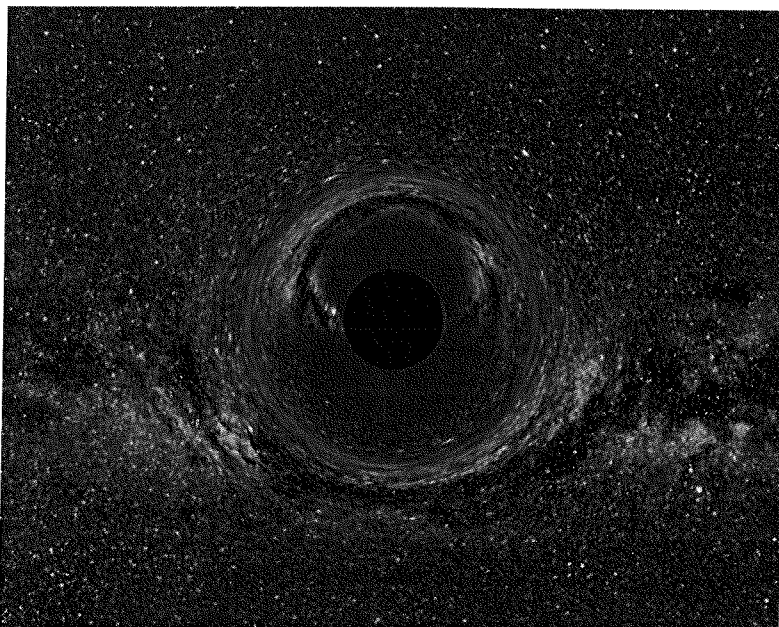
Szczególna Teoria Względności sformułowana przez Alberta Einsteina w 1905 r. połączyła opis zjawisk mechanicznych i elektromagnetycznych. Rozszerzenie tej teorii na grawitację doprowadziło do powstania (Einstein 1915) Ogólnej Teorii Względności (OTW), opartej na „zakrzywionej” czasoprzestrzeni (geometria Riemanna), dostosowanej do opisu zjawisk zachodzących w silnych polach grawitacyjnych i przy dużych prędkościach ciał.

Początkowo OTW została potwierdzona w niewielu i niezbyt precyzyjnych obserwacjach; najważniejszym osiągnięciem było wyjaśnienie anomalnej – tzn. nie dającej się otrzymać z teorii Newtona – składowej ruchu peryhelionowego Merkurego, wynoszącej zaledwie 42 sekundy kątowne na stulecie! OTW budziła zainteresowanie i podziw ze względu na swoje piękno i fundamentalny charakter, ale przez długi czas była na uboczu głównego nurtu fizyki i rozwijała się wyłącznie dzięki pracom teoretycznym. W Polsce, w międzywojennym dwudziestoleciu, takie prace prowadzili Leopold Infeld, Jan Weyssenhoff i Myron Mathisson. Po II wojnie światowej powstało w USA i Europie kilka aktywnych ośrodków badań w dziedzinie OTW i rozpoczęto organizację, odbywających się co trzy lata, międzynarodowych konferencji poświęconych tej teorii. Jedną z pierwszych odbyła się w Polsce (Jabłonna 1962). Największe zainteresowanie budziły wtedy zagadnienia promieniowania grawitacyjnego, kosmologii oraz związków między grawitacją i zjawiskami kwantowymi. Odkrycie w 1965 r. mikrofalowego promieniowania tła potwierdziło *Wielki Wybuch* przewidywany przez relatywistyczną kosmologię Aleksandra A. Friedmanna (1922) i Georges Lemaitre'a (1927)¹. Ale dopiero prace teoretyczne nad czarnymi dziurami, a później ich obserwacje, wprowadziły OTW do głównego nurtu fizyki i przyczyniły się do powstania astrofizyki relatywistycznej.

Nazwa „czarna dziura” pojawiła się dopiero w 1967 r.: John A. Wheeler spopularyzował tę nazwę, zaproponowaną przez anonimowego słuchacza na jego wykładzie. Ale samą ideę czarnych dziur rozważano już w XVIII wieku, opierając się wyłącznie na teorii Newtona. John Mitchell i Pierre Simon de Laplace zwrócili uwagę na to, że według newtonowskiego prawa zachowania energii, aby cząstka mogła dowolnie daleko oddalić się od ciała o masie M i promieniu r , powinna poruszać się z prędkością o kwadracie większym niż $2GM/r$, gdzie G jest stałą grawitacyjną. Wynika stąd, że światło o prędkości c nie może opuścić ciała, którego promień jest mniejszy od jego promienia grawitacyjnego $R=2GM/c^2$. Dla „zwykłych” ciał promień grawitacyjny jest znacznie mniejszy od jego wymiarów; np. dla Słońca R wynosi około 3 kilometrów.

W 1915 r. Karl Schwarzschild, zajęty na froncie wschodnim artyleryjskimi rachunkami balistycznymi, znalazł pierwsze ścisłe rozwiązanie równań Einsteina. Jak się później okazało, opisuje ono sferyczną czarną dziurę. Początkowo, rozwiązanie Schwarzschilda potraktowano nieufnie. Niepokój budziła powierzchnia o promieniu $R=2GM/c^2$: wysyłane z niej światło, obserwowane przez odległego obserwatora, miałyby nieskończone przesunięcie ku czerwieni. Einstein uważał, że taka „osobliwość” nie ma sensu fizycznego i w 1939 r. opublikował pracę poświęconą niemożliwości jej powstania w rzeczywistym świecie. Jednakże w tym samym roku, Robert Oppenheimer i Hartland Snyder wykazali, że kurcząca się kula pyłu zapada się do wnętrza powierzchni o promieniu R , choć nie może to być dostrzeżone przez odległego obserwatora. Był to pierwszy opis powstawania czarnej dziury.

(dokończenie – str. 3)



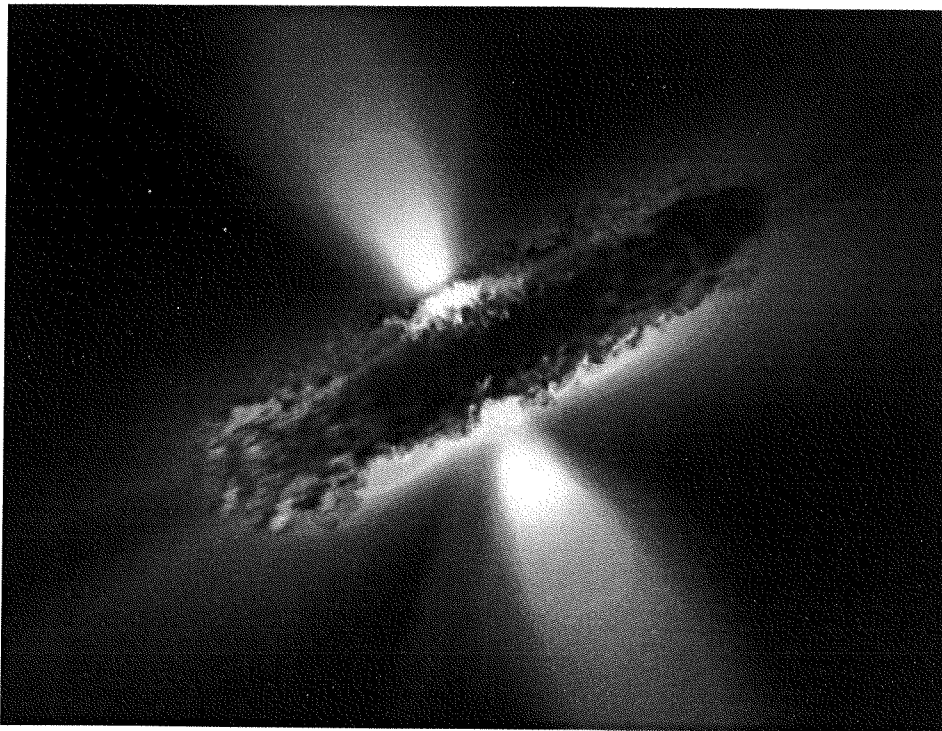
Komputerowa symulacja widoku z odległości 600 km czarnej dziury przed Drogą Mleczną. Masa takiej mikro-czarnej-dziury wynosi 10 mas słonecznych M_{\odot} . Przyspieszenie 4×10^8 g jest niezbędne do stałego utrzymywania tej odległości. (NASA)

Ogólna Teoria Względności i Czarne Dziury

(dokończenie ze str. 2)

Komputerowy model grubego torusa z pyłu kosmicznego, jaki otacza super-masywne czarne dziury i ich dyski akrecyjne. Torus, widziany z boku, blokuje większość światła emitowanego przez dysk akrecyjny. Promienie X i gamma mogą przebić się przez torus, stąd obserwatoria satelitarne (np. INTEGRAL) mogą zlokalizować czarne dziury.

ESA / V. Beckmann (NASA-GSFC)



Wynik ten długo nie wzbudzał większego zainteresowania i dopiero odkrycia lat 1960. radykalnie zmieniły to nastawienie. W 1963 r. Roy P. Kerr znalazł uogólnienie metryki Schwarzschilda, uwzględniające rotację, a Maarten Schmidt odkrył kwazary (*quasars*). Już w roku następnym, niezależnie od siebie, Edwin Salpeter i Jakow B. Zeldowicz wysunęli hipotezę, że źródłem energii kwazarów jest akrecja materii na obiekty o bardzo dużej masie i małych rozmiarach. Pierwsze Teksaskie Sympozjum na temat Astrofizyki Relatywistycznej, poświęcone „Quasi-gwiazdowym obiektom i zapadaniu się grawitacyjnemu”, które odbyło się w grudniu 1963, można uznać za wprowadzenie czarnych dziur – wówczas jeszcze tak nie nazywanych – do głównego nurtu badań.

W 1969 r. Donald Lynden-Bell zauważył, że większość jąder galaktyk powinna zawierać super-masywne czarne dziury. Hipoteza ta została potwierdzona przez obserwacje prowadzone w ciągu następnych 40 lat; najlepiej zbadana super-masywna czarna dziura znajduje się w centrum naszej Galaktyki; ma ona masę rzędu miliona mas Słońca M_{\odot} . Odkryta w ostatnich latach uniwersalna zależność między masą centralnej czarnej dziury a dyspersją prędkości gwiazd w galaktyce nie została jeszcze wyjaśniona, ale zapewne jest odbiciem ewolucji struktur we Wszechświecie. Z drugiej strony, dzięki obserwacjom podwójnych układów rentgenowskich, odkryto dziesiątki czarnych dziur o masach gwiazdowych. Powstają one w wyniku zapadania się jąder gwiazd o masach przynajmniej kilkakrotnie większych od masy Słońca – gwiazd, które wypaliły całe dostępne paliwo jądrowe. W wyniku zapadania się gwiazd o mniejszych masach powstają gwiazdy neutronowe i białe karły.

Powierzchnia czarnej dziury – horyzont zdarzeń – ukrywa przed zewnętrznym obserwatorem osobliwość, w której wielkości fizyczne (w tym siły pływowe) stają się nieskończone. Roger Penrose wysunął hipotezę „kosmicznego cenzora”, zgodnie z którą wszystkie tego typu osobliwości we Wszechświecie są okryte horyzontem.

Przewidywanie przez teorię klasyczną powstawania osobliwości interpretuje się zwykle jako znak, że trzeba tu uwzględnić zjawiska kwantowe, co stymuluje próby zbudowania kwantowej teorii grawitacji. W latach 1968–1975 pokazano, że stacjonarna czarna dziura jest całkowicie scharakteryzowana przez swoją masę, moment pędu i ładunek elektryczny. Gdy okazało się, że prawo rządzące zmianą powierzchni czarnej dziury ma postać podobną do pierwszego prawa termodynamiki, Jacob Bekenstein zaproponował w 1973 r., by pole powierzchni czarnej dziury zinterpretować jako jej entropię. Niedługo potem, Stephen Hawking, posługując się kwantową teorią pola, pokazał, że czarna dziura zachowuje się jak ciało doskonale promieniujące o temperaturze

$$hc^3/16\pi^2 kGM$$

czyli około $10^{-7}(M_{\odot}/M)$ stopni Kelvina (h i k – odpowiednio – stałe Plancka i Boltzmana).

Promieniowanie termiczne czarnej dziury nie przeczy własnościom horyzontu: wypromieniowywane cząstki powstają, na skutek zjawisk kwantowych, w silnym (klasycznym) polu grawitacyjnym w pobliżu horyzontu, ale na zewnątrz czarnej dziury. Ale tego promieniowania nie zaobserwowano: jego temperatura dla znanych czarnych dziur jest niesłychanie niska. Źródłem informacji o czarnych dziurach jest promieniowanie wysyłane przez cząstki poruszające się w dysku akrecyjnym i spadające na czarną dziurę.

Istotną rolę w opracowaniu teorii tych zjawisk odegrał Bohdan Paczyński (1940–2007) i jego współpracownicy.

JEAN-PIERRE LASOTA
ANDRZEJ TRAUTMAN

Kraków–Warszawa
czerwiec 2010

¹ zob. artykuł Wojciecha Dziembowskiego (PAUza 71, 4 marca 2010).