*1966 г. Май* — *Том 89, вып. 1*

# *УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК*

530.12:531.51

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *)

*А. Траутман*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десяти лет заметно оживились исследования и интерес к общей теории относительности (ОТО). Отчасти это обусловлено отсутствием существенного прогресса в других областях теоретической физики. Некоторые физики обращаются к ОТО в надежде, что путем согласования ее с квантовой теорией можно будет заложить основания теории элементарных частиц. Другие рассматривают ОТО как образец физической теории и пытаются применить ее геометрические понятия и методы к другим областям физики. Имеются также попытки связать симметрию элементарных частиц с асимптотической симметрией гравитационных полей [4]. С другой стороны, последние достижения в экспериментальной технике позволяют увеличить точность старых экспериментов, а также проверить новые предсказания ОТО [5,6]. Астрономические открытия последних лет свидетельствуют о том, что, возможно, в астрофизике необходимо учитывать поправки на ОТО. Развитие радиоастрономии и предстоящее использование внеземных телескопов позволят нам лучше узнать распределение материи во Вселенной. Это, в свою очередь, может помочь нам выбрать одну из конкурирующих релятивистских моделей Вселенной. Есть указания на то, что для некоторых астрономических объектов могут играть заметную роль вековые эффекты гравитационной радиации. Высказываются предложения и предпринимаются попытки обнаружить гравитационные волны, приходящие на Землю из космоса [7-9].

Начиная с 1955 г. через каждые два или три года проводятся международные конференции по релятивистской теории гравитации. Последняя такая конференция проходила в июле 1965 г. в Лондоне. Кроме того, в нескольких странах, идущих впереди в области исследований по ОТО, устраивались летние школы, проводились местные и более специализированные конференции, посвященные теории гравитации и смежным проблемам. В Советском Союзе последняя такая конференция была в апреле 1965 г. в Тбилиси.

Настоящая статья содержит обзор ряда результатов и проблем ОТО, причем особое внимание уделено тем из них, которые обсуждались на упомянутых конференциях. Мы опускаем космологию и релятивистскую астрофизику, поскольку им были недавно посвящены обзоры в журнале УФН [10, 11]. Значительное место уделено спорным вопросам: постулату общей ковариантности, принципу эквивалентности, преимущественным

*) Перевод с рукописи выполнен Л. П. Грищуком.

координатным системам, законам сохранения и гравитационному излучению. Изложение элементарно, но мы предполагаем известными основные факты по ОТО, содержащиеся в книге Ландау и Лифшица «Теория поля». По возможности, мы следуем обозначениям, принятым в этой книге.

## 2. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Специальная теория относительности в течение некоторого времени после ее создания встречала возражения со стороны неспециалистов, а также некоторых физиков, которые приветствовали «ниспровержение» эфира, но не могли согласиться с относительностью времени и длины. В настоящее время эйнштейновская интерпретация преобразований Лоренца является общепринятой. Сейчас нет разногласий (во всяком случае, достаточно серьезных, которые имело бы смысл рассматривать) в понимании специальной теории относительности. Это не относится к общей теории: до сих пор в дискуссиях выражаются различные взгляды на физическую интерпретацию ОТО. В частности, физики расходятся во мнениях, должна ли быть определена (и как) гравитационная энергия, какая система отсчета (если она существует) является в ОТО преимущественной, что означает принцип общей ковариантности. Эти проблемы тесно связаны друг с другом и с принципом эквивалентности, который лежит в основе ОТО.

Эйнштейн придавал важное значение принципу эквивалентности, уподоблял его постулату относительности и считал фундаментом теории гравитации [12]. Его позиция в этом отношении является предметом критики [13, 113, 114]. Это связано с тем, что иногда несколько неточно и неоправданно грубо формулируют эйнштейновский принцип эквивалентности.

Для того чтобы прийти к точной форме этого принципа и объяснить его значение, достаточно рассмотреть физику Ньютона. Ньютоновская теория базируется на ряде гипотез, которые не всегда явно формулируются. Среди них: 1) пространство-время является четырехмерным многообразием; 2) имеется скалярная величина $t$ (которую называют абсолютным временем), такая, что гиперповерхности $t = \text{const}$ представляют собой трехмерные евклидовы пространства. Последнее предположение означает, что в каждом пространстве $t = \text{const}$ существуют преимущественные (декартовы) координатные системы, но оно ничего не говорит о связи между этими системами для различных значений $t$. Такая связь устанавливается первым законом динамики. Этот закон можно разделить на две части. Первая часть гласит, что в отсутствие тяготения существует преимущественное движение частиц, которое называется свободным движением. Оно достигается в идеализированном случае, когда отсутствуют все взаимодействия. Вторая часть закона утверждает существование инерциальных систем отсчета: в пространстве-времени существуют такие координатные системы, для которых $t$ является одной из координат, и если три остальные обозначить как $x$, $y$, $z$, то свободное движение характеризуется тем, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Нетрудно видеть, что первому закону динамики можно дать геометрическую формулировку. Движение частицы соответствует мировой линии в пространстве-времени, т. е. кривой, пересекающей по одному разу каждую гиперповерхность $t = \text{const}$. Первый закон Ньютона равносилен утверждению, что имеется преимущественное семейство мировых линий, соответствующих свободному движению, в пространстве-времени существует симметричная аффинная связность $\Gamma$ [14], интегрируемая (плоская) и такая, что мировые линии являются по отношению к ней геодезическими. Ясно, что последняя формулировка является достаточно общей, чтобы быть применимой также и к специальной теории относительности. Из того факта, что Г является плоской, следует, что существуют системы координат, в которых коэффициенты связности равны нулю. Таковыми являются инерциальные системы координат; любые две такие системы связаны при помощи линейных (галилеевых) преобразований. Ситуация станет более сложной, если мы попытаемся объяснить гравитацию. В этом случае свободного движения не существует. Эксперименты показывают, что для всех тел масса пропорциональна гравитационному заряду («эквивалентность гравитационной и инертной масс»). Лучшее, что мы можем сделать, это рассмотреть свободное падение частиц, т. е. движение, происходящее в гравитационном поле, причем все устранимые взаимодействия исключены. Подходящим обобщением первого закона динамики является следующее:

1. Существует преимущественное движение — свободное падение.

2. В пространстве-времени существует симметричная аффинная связность Г, такая, что мировые линии свободно падающих частиц являются по отношению к ней геодезическими.

Это эквивалентно следующему: свободно падающие частицы определяют аффинную связность в пространстве-времени. В ньютоновской теории утверждения, приведенные выше, должны быть дополнены [15, 16].

3. Коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{kl} = \overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl} + h^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}t_k t_l \qquad (i, \ldots, l = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

где $\overset{0}{\Gamma}$ — плоская аффинная связность, $t_k = \dfrac{\partial t}{\partial x^k}$, $t$ является абсолютным временем и $h^{ij}$ — метрический тензор евклидовых пространств $t = \text{const}$. Метрический тензор ковариантно постоянен по отношению к Г. Если $(x,\ y,\ z)$ — декартовы координаты на гиперповерхности $t = \text{const}$, то

$$h^{ij} = (\operatorname{grad} x^i)(\operatorname{grad} x^j),$$

где

$$\operatorname{grad} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z);$$

функция $\varphi$ — ньютоновский потенциал.

Расщепление Г, представленное формулой (1), не является единственным: если $\psi$ — какое-нибудь решение уравнения

$$t_i\psi_{;\,kl} - t_k\psi_{;\,il} = 0,$$

то

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl} - h^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}t_k t_l$$

также является плоской аффинной связностью. Из (1) следует, что $t$ может быть нормировано так, чтобы быть аффинным параметром вдоль геодезической. Если это сделано, уравнение геодезической приводится к виду ньютоновского закона движения в гравитационном поле

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = -h^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}.$$

Член с $\overset{0}{\Gamma}$ соответствует кориолисовым, центробежным и другим силам подобного типа, которые возникают при использовании неинерциальных систем координат. Более того, система отсчета в пространстве-времени может быть выбрана так, чтобы было $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl} = 0$.

Уравнение движения приводится тогда к обычной форме

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\operatorname{grad} \varphi. \qquad (2)$$

Однако группа преобразований, сохраняющих (2), много шире, чем группа Галилея. Если вектор $\mathbf{a}(t)$ зависит от времени, то замена

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}, \qquad (3\text{а})$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \ddot{\mathbf{a}}\,\mathbf{r} \qquad (3\text{б})$$

*не изменяет* (2). *Ясно, что формула* (3б) *отражает нетензорные* трансформационные свойства $\Gamma$ и неединственность расщепления $\Gamma$ на $\overset{0}{\Gamma}$ и гравитационную силу. Обычно рассматривают гравитационные поля, создаваемые ограниченными источниками. Тогда можно нормировать потенциал $\varphi$, исходя из требования обращения его в нуль на больших расстояниях; это исключает возможность преобразований типа (3б) и восстанавливает привилегированную роль группы Галилея. Однако этого нельзя сделать в том случае, когда гравитационное поле простирается во всем пространстве, как в космологии. В этом случае мы стоим перед выбором: либо вообще отказаться от концепции инерциальных систем отсчета, либо назвать инерциальными все системы, в которых свободное падение характеризуется (2).

Этот анализ ньютоновской теории можно резюмировать следующим образом. Локальные, классические эксперименты с частицами, свободно падающими в пространстве, определяют в четырехмерном пространстве-времени поле симметричной аффинной связности $\Gamma$. Вообще говоря, эта связность не является интегрируемой. В случае ограниченных материальных систем посредством преимущественных экспериментов с частицами, двигающимися свободно на бесконечности, можно определить другую аффинную связность $\overset{0}{\Gamma}$, которая является плоской. Она может быть использована для выделения класса инерциальных систем, определенных с точностью до преобразований Галилея. В общем случае, когда недоступны такие нелокальные эксперименты, $\Gamma$ является единой механически определенной связностью.

Соображения, приведенные выше, включали только классическую механику и базировались на эквивалентности гравитационной и инертной масс. Сейчас возникает следующий вопрос: можно ли посредством немеханических экспериментов определить инерциальную систему отсчета при наличии гравитации? Или, более точно: можно ли использовать немеханические эксперименты для того, чтобы ввести в пространстве-времени плоскую связность в дополнение к неинтегрируемой связности, определенной движущимися телами? Принцип эквивалентности заключается в отрицательном ответе на этот вопрос. Действительно, предположим, что имеется такое явление (например, электромагнетизм), которое устанавливает плоскую связность $\overset{0}{\Gamma}$. Разность $\Gamma^i_{kl} - \overset{0}{\Gamma}{}^i_{kl}$ является тензором, и есть смысл считать, что соответствующий ей член в уравнениях движения представляет собой гравитационную силу. Таким образом, мы получаем абсолютный и локальный метод, с помощью которого можно отличить инерциальные силы от гравитационных. А это противоречит принципу эквивалентности в формулировке, данной Эйнштейном.

Справедливость предыдущих замечаний не ограничивается физикой Ньютона. Следующие два утверждения резюмируют роль принципа эквивалентности вообще для теории гравитации.

1. Равенство гравитационной массы и инертной массы. Изучая движение свободно падающих частиц, можно ввести в пространстве-времени симметричную аффинную связность. Предположение, что геофизические линии по отношению к ней совпадают с мировыми линиями свободно падающих частиц, определяет эту связность однозначно. При наличии гравитации связность является неинтегрируемой (искривленной). Поэтому такую связность нельзя использовать для определения глобальной инерциальной системы отсчета.

2. Принцип эквивалентности распространяет предыдущие соображения на все остальные явления, которые нельзя свести к движению классических частиц. В соответствии с этим принципом мы никоим образом не можем установить существование плоской связности в гравитационном поле, используя только данные локальных физических экспериментов. Все-таки эксперименты приводят к существенно одной и той же связности Г.

Это отнюдь не очевидно; неизвестно, на все ли типы взаимодействий должна влиять одна и та же геометрия пространства-времени. Как подчеркивал Фок, в формулировке принципа эквивалентности ограничение локальности экспериментов существенно. Как было выяснено выше, для слабых полей, создаваемых изолированными источниками. можно определить глобальную плоскую связность, изучая свободное движение на больших расстояниях. Наконец, надо иметь в виду следующую возможность. Уравнение геодезической не изменится, если Г заменить на $\Gamma + T$, где $T$ — тензор валентности (1, 2), антисимметричный по отношению к ковариантным индексам. Поэтому, даже если физическая аффинная связность не является симметричной, простые механические эксперименты могут определить только ее симметричную часть. Ясно, как обобщить принцип эквивалентности, чтобы учесть эту возможность. Э. Картан был первым, кто понял, что аффинная связность пространства-времени может быть асимметричной и, если это так, ее антисимметричная часть каким-то образом связана со спином [17]. Недавно подобные идеи выдвигались некоторыми авторами [18, 21].

Легко видеть аналогию между принципом эквивалентности и эйнштейновским постулатом относительности: оба являются обобщениями для всех физических явлений некоторых хорошо установленных фактов из классической механики.

## 3. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ, СИММЕТРИЯ И ИНВАРИАНТНОСТЬ

Другим предметом спора является вопрос о роли принципа общей инвариантности. Является ли он значительным принципом и действительно ли он обобщает основной постулат специальной теории относительности? Содержит ли теория гравитации Эйнштейна больше относительности, чем специальная теория? Согласно Фоку, ответ должен быть отрицательным, и даже следует отказаться от названия «общая теория относительности» [13] *). Спор шел бы в основном о словах, если бы он не был связан с вопросом о привилегированных системах отсчета в ОТО.

Чтобы уяснить смысл разногласия, рассмотрим понятие симметрии физической системы. Вообще говоря, симметрия — это рецепт, по которому

*) Взгляды В. А. Фока о роли и месте принципа эквивалентности и о названии «общая теория относительности» подробно изложены в его речи «Принципы механики Галилея и теория Эйнштейна», опубликованной в журнале «Успехи физических наук» [114] и не упомянутой в библиографии автора. Публикуя статью А. Траутмана, редакция обращает внимание читателей на наличие различных позиций в современной теории тяготения. (*Прим. ред.*)

любому физически допустимому состоянию движения системы ставится в соответствие другое такое состояние той же системы. Более точно можно сформулировать понятие симметрии следующим образом. В любой физической теории мы рассматриваем систему $E$ всех состояний и подсистему $F \subset E$ физических состояний, которые могут осуществиться в действительности. Элементы $F$ выделяются из числа элементов $E$ тем, что мы обычно называем законами или уравнениями движения. Симметрия — это такое взаимнооднозначное преобразование $E$ в $E$, которое переводит $F$ в $F$. Так как $F$ определяется законами движения, то обычно говорят, что симметрия — это такие преобразования, которые оставляют неизменными уравнения движения. Это можно выразить в другой форме, удобной для наших целей [22]. Все величины, фигурирующие в любой физической теории, можно разделить на две группы: внешние, или абсолютные, величины и динамические переменные. Только последние удовлетворяют некоторым



ческой переменной и что не существует вообще абсолютных величин, связанных с пространством-временем. Почти с момента возникновения ОТО этот принцип является объектом критики. Вне зависимости от мотивов все попытки подорвать его сводятся к одной и той же идее: введение абсолютной геометрической структуры в дополнение к динамической метрической структуре. Наиболее крайним случаем являются теории с двумя метриками [24]. Предложение Фока выделить гармонические координатные системы также подразумевает возможность введения вспомогательной плоской метрики: достаточно сказать, что компоненты этой метрики в гармонических координатах имеют значения метрики Минковского. Преобразования Лоренца, рассматриваемые Фоком, оставляют инвариантной эту (абсолютную) плоскую метрику. В последние годы предпринимались попытки определить гравитационную энергию, постулируя существование некоторых привилегированных полей ортогональных базисных векторов («тетрад») [25–27]. Нет ничего незаконного в рассмотрении системы таких полей. Но как только мы выделяем класс полей локальных базисов, таких, что любые два представителя класса связаны друг с другом при помощи преобразований Лоренца с постоянными коэффициентами, мы вводим каноническим образом плоскую метрику в пространстве-времени. В соответствии с нашей точкой зрения, чтобы оправдать любую из таких попыток, необходимо связать вторую, плоскую, метрику с физическим явлением (например, показав, как можно измерить собственное время, соответствующее этой новой метрике).

## 4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Связь между симметрией и абсолютными величинами можно сделать более явной на примере законов сохранения [22, 28]. С другой стороны, проблема энергии в ОТО интересна сама по себе и в последние годы привлекала значительное внимание [29]. Именно поэтому существенная часть нашего обзора посвящена законам сохранения, их связи с симметрией и проблемой гравитационной энергии.

Мы начнем с краткого вывода теоремы Нётер [30] о существовании законов сохранения и тождеств в классических теориях, уравнения движения которых могут быть выведены из принципа действия. Так как энергия, импульс и угловой момент интересуют нас больше, чем «внутренние» сохраняющиеся величины типа заряда, изоспина и барионного числа, мы сделаем допустимые упрощающие предположения. Более общее рассмотрение можно найти в других работах.

модификаций формул.) Уравнения поля можно символически записать как

$$\frac{\delta W}{\delta \psi}=0,$$

где

$$\frac{\delta W}{\delta \psi}=\frac{\partial L}{\partial \psi}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_i}\right) \quad \text{и} \quad \psi_i=\frac{\partial \psi}{\partial x^i}.$$

В простом случае, который мы рассматриваем, тождества Нётер могут быть получены следующим образом. Пусть $X$ — произвольное векторное поле в пространстве-времени, а $Xf$ — производная Ли[31] поля $f$ *) (в физической литературе производную Ли часто обозначают как $\delta^* f$ или $\bar{\delta} f$). Для скалярной плотности

$$XL-\frac{\partial}{\partial x^i}(LX^i)=0. \tag{8}$$

Если производить суммирование по повторяющимся индексам и использовать

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}(Xf),$$

то тождество (8) можно записать как

$$\frac{\delta W}{\delta \psi}X\psi+\frac{\delta W}{\delta \omega}X\omega+\frac{\partial t^i}{\partial x^i}=0, \tag{9}$$

где

$$t^i=\frac{\partial L}{\partial \omega_i}X\omega+\frac{\partial L}{\partial \psi_i}X\psi-LX^i.$$

Всякое векторное поле на многообразии генерирует однопараметрическую группу преобразований многообразия. Группа, соответствующая $X$, является группой симметрии, если она оставляет $\omega$ инвариантной; необходимым и достаточным условием этого является

$$X\omega=0. \tag{10}$$

Таким образом, мы установили связь между симметрией, уравнениями поля и законами сохранения:

$$\text{если} \quad X\omega=0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta W}{\delta \psi}=0, \quad \text{то} \quad \frac{\partial t^i}{\partial x^i}=0. \tag{11}$$

Условия, накладываемые на симметрию абсолютными элементами, обычно ограничивают ее настолько сильно, что лишь ограниченное число линейно независимых векторных полей $X$ удовлетворяет уравнению (10). В этих случаях симметрия характеризуется группой Ли. Решения уравнений (10) дают представление ее алгебры Ли. Наиболее важным примером рассмотренной ситуации является теория поля в заданном римановом пространстве-времени. В этом случае (который включает теорию поля в плоском пространстве-времени ) $\omega$ совпадает с метрическим тензором $g_{ik}$. Для широкого класса полей $\psi$ производная Ли имеет вид

$$X\psi=X^i\psi_i+F_i^j\psi\frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

где $F_i^j$ является постоянной матрицей по отношению к индексам суммирования $\psi$. В качестве дальнейшего упрощения предположим, что $L$ не зависит от производных метрического тензора. Симметричный тензор плотности энергии-импульса есть

$$T^{ik}=-2\frac{\delta W}{\delta g_{ik}}=-2\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}, \tag{12}$$

*) Относительно векторного поля $X$. (*Прим. перев.*)

и (9) можно переписать как

$$\frac{\delta W}{\delta \psi} X\psi - \frac{1}{2} T^{ik} X g_{ik} + \frac{\partial t^i}{\partial x^i} = 0. \tag{13}$$

Так как (13)— тождество с произвольным $X$, можно приравнять нулю коэффициенты перед различными производными $X^j$. Это приводит к тождествам [32-34]

$$S_i^{lk} + S_i^{kl} = 0, \tag{14а}$$

$$T_i^k = t_i^k + S_{i,\,l}^{kl} + \frac{\delta W}{\delta \psi} F_i^k \psi, \tag{14б}$$

$$T_{i;\,k}^k = -\frac{\delta W}{\delta \psi} \psi_{;\,i} + \left(\frac{\delta W}{\delta \psi} F_i^j \psi\right)_{;\,j}, \tag{14в}$$

где

$$S_i^{kl} = \frac{\partial L}{\partial \psi_l} F_i^k \psi \quad \text{и} \quad t_i^k = \frac{\partial L}{\partial \psi_k} \psi_{;\,i} - L\delta_i^k.$$

Тензор $t_i^k$ называют каноническим тензором энергии-импульса. В общем случае он является несимметричным. Дивергенции вектора $t^i$ и вектора

$$T^i = T^{ik} X_k \tag{15}$$

равны нулю всегда, когда $X$ генерирует в пространстве-времени преобразования симметрии, т. е. тогда, когда удовлетворяется уравнение Киллинга

$$X g_{ik} = X_{i;\,k} + X_{k;\,i} = 0. \tag{16}$$

Кроме того, сохраняющиеся величины, соответствующие $T^i$ и $t^i$, равны при условии, что поле исчезает достаточно быстро на больших расстояниях. Это следует из тождества

$$T^i = t^i + \frac{\partial}{\partial x^j} (X^k S_k^{ij}) + \frac{\delta W}{\delta \psi} F_k^i \psi X^k,$$

вытекающего из (14). Физический смысл сохраняющихся величин зависит от геометрических свойств вектора Киллинга $X$. Например, в пространстве Минковского, используя декартовы координаты $(x^i)$, мы можем принять

$$X^i = \omega_k^i x^k, \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$$

в качестве генератора преобразований Лоренца. Тогда вектор $t^i$ становится следующим:

$$t^i = \frac{1}{2} I_{kl}^i \omega^{kl},$$

где

$$I_{kl}^i = x_k t_l^i - x_l t_k^i + S_{kl}^i - S_{lk}^i$$

— тензорная плотность углового момента. Последние два члена в выражении для $I$ обычно интерпретируют как спиновый угловой момент. В четырехмерном римановом пространстве уравнение Киллинга (16) имеет самое большее 10 линейно независимых решений (в случае пространства постоянной кривизны). В наиболее общем случае полностью несимметричного пространства векторов Киллинга не существует.

В общей теории относительности абсолютные элементы вообще отсутствуют. Любое векторное поле $X$ генерирует преобразование симметрии. Уравнение (9) есть тождество по отношению к $X$, т. е. имеется бесконечное число законов сохранения [35]. Кроме того, уравнения (9) приводят к обобщенным «тождествам Бианки»

$$\frac{\delta W}{\delta\psi}\psi_i-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\delta W}{\delta\psi}F_i^j\psi\right)=0, \tag{17}$$

которые справедливы независимо от уравнения поля. Для любого конкретного $X$ уравнения (11) дают «слабый» закон сохранения. Однако в рассматриваемом частном случае (нет абсолютных элементов, общая инвариантность) каждый из этих слабых законов при помощи (17) может быть преобразован в сильный закон [36]

$$\frac{\partial\theta^i}{\partial x^i}=0, \tag{18}$$

где

$$\theta^i=t^i+\frac{\delta W}{\delta\psi}F_j^i\psi X^j. \tag{19}$$

Уравнения (18) остаются в силе независимо от того, выполняются уравнения поля или нет. Это подразумевает существование антисимметричной тензорной плотности («суперпотенциала») $U^{ij}$, такой, что

$$\theta^i=\frac{\partial U^{ij}}{\partial x^j}. \tag{20}$$

Ясно, что дифференциальный закон сохранения (11) остается в силе при замене

$$U^{ij}\to U^{ij}+V^{ij}, \tag{21}$$

где $V^{ij}$ также является антисимметричным тензором. Полная сохраняющаяся величина *)

$$\int t^i\,dS_i=\frac{1}{2}\int U^{ij}\,df_{ij}^* \tag{22}$$

не затрагивается преобразованием (21) при условии, что $V^{ij}$ стремится к нулю достаточно быстро на больших расстояниях.

Теперь рассмотрим подробнее законы сохранения в теории гравитации. Обозначим чисто гравитационное действие через $W_g$:

$$W_g=-\frac{1}{16\pi}\int\sqrt{-g}\,R\,d\Omega \qquad (k=c=1).$$

Принимая

$$G^{ik}=-16\pi\frac{\delta W_g}{\delta g_{ik}},$$

получим уравнения гравитационного поля (отметим, что $G^{ik}$ и $T^{ik}$ являются тензорными плотностями)

$$G^{ik}=-8\pi T^{ik}. \tag{23}$$

Основное тождество (9) запишется как

$$-\frac{1}{16\pi}G^{ik}Xg_{ik}+\frac{\partial\tau^i}{\partial x^i}=0, \tag{24}$$

*) Обозначения интегралов такие же, как и в книге Л. Ландау и Е. Лифшица «Теория поля», изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962, § 6.

где $\tau^i$ (в этом частном случае) обозначает то, что прежде обозначалось $t^i$. Тождества Бианки (17) имеют вид

$$G^{ik}_{;\,k}=0. \tag{25}$$

Уравнение (24) можно записать в форме (18) с

$$\theta^i=\tau^i-\frac{1}{8\pi}G^{ik}X_k. \tag{26}$$

Наконец, если использовать уравнения поля (23), то

$$\theta^i=\tau^i+T^i, \tag{27}$$

где $T^i$ определяется равенством (15). Привлекательной интерпретацией уравнений (18) и (27) является следующая: в ОТО полный сохраняющийся *«поток энергии» $\theta^i$ состоит из гравитационной части $\tau^i$ и связанной с материей части $T^i$*. Однако в общем случае сильного гравитационного поля без какой-либо специальной симметрии никакое из векторных полей $X$ не может быть преимущественным по сравнению с другими. Соответствующие законы сохранения не имеют ясного физического смысла.

Возможная форма суперпотенциала, предложенная Комаром [37], была выведена из вариационного принципа Мёллером [38]:

$$U^{ij}=\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left(X^{j;\,i}-X^{i;\,j}\right). \tag{28}$$

Применяя уравнения (20), (26) и (28), получим точную формулу для $\tau^i$.

В большинстве случаев нас интересует гравитационное поле, создаваемое изолированной, ограниченной материальной системой. На больших расстояниях от системы поле является слабым, а метрика — почти плоской. В далекой области можно рассмотреть приближенную симметрию пространства-времени и ожидать, что она будет иметь тот же порядок и ту же структуру, что и в плоском пространстве. Есть основания предполагать, что будет найдено (оставляем в стороне вопрос о том, как именно это должно быть сделано) 10 линейно независимых асимптотических векторных полей Киллинга. Так как полные сохраняющиеся величины могут быть выражены при помощи поверхностных интегралов, взятых на бесконечности (уравнение (22)), значения этих величин будут однозначно определяться по известной асимптотической симметрии. Формальное доказательство этого утверждения было впервые дано Эйнштейном [39] и Клейном [40].

Все рассмотренные до сих пор величины — $\theta^i$, $U^{ij}$, $\tau^i$ и другие — обладали тензорными свойствами. Многие исследователи прилагали усилия, чтобы нарушить векторный характер $\tau^i$. (В результате появляются величины, известные под названием псевдотензоров или комплексов гравитационной энергии и импульса.) Чтобы увидеть, как это делается, достаточно заметить, что дифференциальный закон сохранения (18) выполняется *лишь в случае антисимметрии величины $U^{ij}$ вне зависимости от ее тензорных свойств*. Соответственно ни $V^{ij}$, ни $X^i$ не должны обязательно быть тензорами. Например, при подходящем выборе $V^{ij}$ суперпотенциал Комара можно преобразовать к виду, данному Бергманом:

$$'U^{ij}=U^{ij}_kX^k, \tag{29}$$

где

$$U^{ij}_k=\frac{1}{16\pi\sqrt{-g}}g_{kl}\frac{\partial}{\partial x^m}\left(g\left(g^{im}g^{jl}-g^{jm}g^{il}\right)\right).$$

Величины $\theta^i$ и $\tau^i$ зависят от $g_{ij}$, $X^k$ и их производных, причем зависимость от $X$ является линейной. Предположим, что в какой-то координатной системе даны 16 функций $\lambda^{ik}$ ($\lambda^{ik}$ могут и не быть компонентами тензора; положение индексов несущественно) и константы $c_k$. Пусть

$$X^k = c_i \lambda^{ik}. \tag{30}$$

Тогда

$$\theta^k = c_i \theta^{ik},$$

где $\theta^{ik}$ — система 16 функций, зависящих от $\lambda$ и метрического тензора. Подобную процедуру можно произвести над $\tau$ и суперпотенциалом. Так как $\theta^i$ удовлетворяет уравнению (18) при любых $X$, а величины $c$ являются произвольными, получаем

$$\frac{\partial \theta^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

По существу все имеющиеся в литературе гравитационные псевдотензоры и комплексы могут быть получены этим методом. Например, комплекс, предложенный в 1958 г. Мёллером [41], следует из суперпотенциала Комара, если принять $\lambda^{ik} = \delta^k_i$ (т. е. $X^i = c^i = \text{const}$). Если исходить из суперпотенциала Бергмана, тот же выбор величин $\lambda$ приводит к каноническому псевдотензору Эйнштейна. С другой стороны, симметричный псевдотензор Ландау — Лифшица *) можно получить из (29), если принять $\lambda^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}$. Наконец, если ($\lambda^{0k}$, $\lambda^{1k}$, $\lambda^{2k}$, $\lambda^{3k}$)—поле ортогональных базисных векторов, метрический тензор можно выразить как

$$g^{kl} = \lambda^{0k}\lambda^{0l} - \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda^{\alpha k}\lambda^{\alpha l}$$

и уравнение (30) дает истинный вектор $X$. Поэтому если исходить из (28), четыре величины ($\theta^{0k}$, $\theta^{1k}$, $\theta^{2k}$, $\theta^{3k}$) будут векторными плотностями, зависящими от базисных векторов и их производных. «Жесткие» преобразования Лоренца базисных векторов

$$\lambda^{ik} \to L^i_j \lambda^{jk}, \quad L^i_j = \text{const}$$

индуцируют подобное преобразование величин $\theta$ [25, 26, 42].

Хотя псевдотензоры не являются ковариантными объектами, они приводят к разумным результатам для полной энергии и импульса при условии, что используется система координат, декартова на бесконечности. Это происходит потому, что функции $\lambda^{ik}$ всегда выбираются так, чтобы они (по крайней мере на больших расстояниях) в декартовой системе координат становились постоянными. Таким образом, для любого $c_i$ вектор (30) асимптотически является вектором Киллинга. Поэтому расчеты, основанные на псевдотензорах, вычисленных в асимптотически декартовой системе координат, эквивалентны расчетам, использующим асимптотические векторы Киллинга. Конечно, понятия асимптотической симметрии и асимптотически прямолинейной системы координат нуждаются в точных определениях. Может оказаться необходимым видоизменить эти определения для рассматриваемого частного случая. Попытка определить асимптотически прямолинейную координатную систему изложена в разделе 6.

---

*) См.: Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962, § 99. (*Прим. перев.*)

Этот несколько педантичный анализ законов сохранения показывает, что в ОТО понятия энергии, импульса и др. не так хорошо определены, как в специальной теории относительности. В любом случае гравитационная энергия не может быть локализована.

В классической физике понятие энергии неотделимо от понятия силы. Принцип эквивалентности гласит, что (по крайней мере локально) гравитационная сила не может быть удовлетворительно определена.

## 5. ПОРЯДКИ ВЕЛИЧИН ЭФФЕКТОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Простое рассмотрение, основанное на принципе эквивалентности и анализе размерностей, а также использующее слабость гравитационного взаимодействия, позволяет сделать ряд выводов о величине и природе физических эффектов ОТО. Например, хорошо известно, что величину красного смещения в гравитационном поле можно получить элементарным образом, используя соответствие между ОТО и теорией Ньютона. В этом разделе мы сделаем в общих чертах несколько подобных предсказаний; они будут получены без применения точной формы уравнений Эйнштейна.

Во-первых, рассмотрим движение частицы с массой $m$ в гравитационном поле сильно вращающегося тела, имеющего массу $M$ и угловой момент $\mathbf{S}$. Из этих величин, а также из универсальных констант $k$ и $c$ и вектора относительного положения тел $\mathbf{r}$ можно образовать безразмерные выражения

$$\frac{kM}{c^2 r} \quad \text{и} \quad \frac{kS}{c^3 r^2}. \tag{31}$$

Поэтому, с учетом первых поправок, обусловленных гравитацией и относительностью, возможной формой функции Лагранжа для частицы является

$$\frac{L}{mc^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{kM}{c^2 r} + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \alpha\left(\frac{kM}{c^2 r}\right)^2 + \beta\frac{kM}{c^2 r}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \gamma\frac{k\,[\mathbf{Sr}]}{c^3 r^3}\,\frac{\mathbf{v}}{c}. \tag{32}$$

Первые два члена — ньютоновские, третий описывает первую поправку на специальную теорию относительности. Остальные члены входят с неизвестными численными коэффициентами. Их точные значения определяются при подробном рассмотрении теории, но в любом случае они должны быть порядка единицы. Базируясь на выражении (32), рассмотрим различные релятивистские поправки к ньютоновской теории одного тела. Если пренебречь величиной $\mathbf{S}$, смещение перигелия за один оборот, полученное из (32), имеет порядок $kM/c^2 r$. Теория Эйнштейна дает $6\pi\,\frac{kM}{c^2\varrho}$, где $\varrho$ — большая полуось ньютоновского эллипса. Другой общерелятивистский эффект, который легко получить из (32), заключается в вековом изменении плоскости движения частицы, находящейся в поле тяжелого вращающегося тела. Если $\mathbf{I}$ — вектор углового момента частицы $m$ по отношению к телу $M$, то (32) приводит к

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{\gamma k}{c^2 r^3}[\mathbf{IS}].$$

Если $\mathbf{I}$ и $\mathbf{S}$ не параллельны, вектор $\mathbf{I}$ будет прецессировать вокруг $\mathbf{S}$; теория Эйнштейна дает такую же формулу с $\gamma = 2$.

В большинстве случаев величины общерелятивистских поправок пропорциональны отношению $km/c^2 r$, образованному из величин $m$ и $r$, характерных для рассматриваемой задачи. Поэтому обычно говорят, что ОТО никак не связана со структурой элементарных частиц. Если за $r$

принять классический радиус электрона, то

$$\frac{km}{c^2r}=\frac{km^2}{e^2}\sim 10^{-43}.$$

Более того, ясно, что по атомной шкале даже ньютоновская гравитация не играет роли; отношение гравитационного взаимодействия между протоном (масса $M$) и электроном (масса $m$) к их электрическому взаимодействию

$$\frac{kMm}{e^2}\sim 10^{-40}.$$

Незначительность роли гравитации по атомной шкале лучше всего можно видеть, если сравнить размеры и энергию связи обычного атома и «гравитационного атома» (два нейтрона, связанных тяготением). Радиус электрического атома порядка

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{1}{\alpha^2}\sim 10^{-8}\ см,$$

в то время как радиус гравитационного атома

$$\frac{kM}{c^2}\left(\frac{\Lambda}{l}\right)^4\sim 10^{28}\ см,$$

где $\Lambda=\hbar/Mc$ и

$$l=\sqrt{\frac{kh}{c^3}}=1{,}6\cdot 10^{-33}\ см. \qquad (33)$$

Кстати, заметим, что радиус гравитационного атома того же порядка, что и «радиус Вселенной», $r=c/H$ ($H$ — константа Хаббла).

Если $\varrho$ — плотность массы $M$, то на поверхности тела

$$\frac{kM}{c^2r}\sim\frac{k\varrho r^2}{c^2}\,. \qquad (34)$$

Следовательно, эффекты ОТО заметны для больших и плотных тел. Эти эффекты, несомненно, важны в космологии: если положить $r=c/H$, а для $\varrho$ принять значение средней плотности вещества во Вселенной, то для отношения (34) получим число порядка единицы.

Подобным образом, используя простые аргументы, можно оценить величину эффектов, связанных с гравитационной радиацией, и обсудить их существенные свойства [43]. Элементарные соображения, основанные на ньютоновском законе сохранения массы и на эквивалентности инертной и гравитационной масс, показывают, что не существует гравитационного монопольного и дипольного излучений.

Так как гравитация существует как классическое (макроскопическое) поле, следует ожидать, что она описывается тензорным полем. Из того факта, что гравитационная сила пропорциональна $1/r^2$ и является притягивающей, следует, что это соответствует полю нулевой массы и четного спина [44].

Пусть $\varphi$ — та компонента гравитационного поля, которая в нерелятивистском пределе переходит в ньютоновский потенциал. Можно ожидать, что для не слишком больших скоростей и не очень сильных полей $\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=4\pi k\varrho, \qquad (35)$$

где $\varrho$ — плотность массы. Разложение в ряд запаздывающего решения уравнения (35) дает

$$\varphi=-\frac{kM}{r}-\frac{k\mathbf{rP}}{cr^2}+\text{более высокие мультиполи}. \qquad (36)$$

Здесь $M$ и $\mathbf{P}$ — полные масса и импульс. Для изолированной системы эти величины постоянны. Они не были бы такими, если бы источник гравитационного поля не был тождествен распределению инертных масс. Из теории поля следует, что поток излученной энергии пропорционален квадрату первых производных потенциала. Соответственно, можно ожидать, что интенсивность излучения гравитационных волн имеет порядок

$$\frac{c}{k}\oint(\nabla\varphi)^2\,dS, \tag{37}$$

где коэффициент $c/k$ введен для того, чтобы обеспечить правильную размерность; интегрирование производится по сфере, охватывающей систему. Производные монопольного и дипольного членов в выражении (36) ведут себя как $1/r^2$ и не дают вклада в (37). Господствующее положение занимает излучение квадрупольного типа; если $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha$, $\beta = 1, 2, 3$)— тензор квадрупольного момента, то

$$P\sim\frac{k}{c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta} \tag{38}$$

(плюс вклад высших мультиполей). Формула (38) является простым следствием (36) и (37) и не зависит от какой-либо конкретной теории гравитации [7]. Такая теория необходима для определения величины численного коэффициента в (38). Иногда объясняют отсутствие дипольного гравитационного излучения тем, что не существует отрицательных масс. Приведенные выше соображения показывают, что это не так и что существенную роль здесь играет эквивалентность гравитационной и инертной масс. Дипольного излучения не может быть даже с учетом существования отрицательных масс, но при условии, что эквивалентность имеет место. Можно также привести аргумент в пользу обратного утверждения: источники поля со спином 2 и массой 0 должны быть идентичны распределению энергии и импульса. В применении к точечным массам это дает эквивалентность гравитационной и инертной масс [45].

Как известно, теория предсказывает, что уносимая гравитационными волнами энергия должна быть чрезвычайно малой. Одну из причин этого мы только что рассмотрели. Более важной причиной является малость гравитационного радиуса $km/c^2$. Для гравитирующей системы, состоящей из двух тел равной массы $m$, двигающихся по круговым орбитам радиуса $r$, формула (38) дает

$$P\sim\frac{mc^2}{r/c}\left(\frac{km}{c^2r}\right)^4.$$

Для подобной системы в электродинамике (две частицы равной массы $m$ и противоположных зарядов $e$ и $-e$, движущиеся по круговым орбитам под действием собственного притяжения со скоростью $v \ll c$) интенсивность электромагнитного (дипольного) излучения

$$P_{\text{э.м.}}\sim\frac{mc^2}{r/c}\left(\frac{e^2}{mc^2r}\right)^3,$$

а интенсивность гравитационного излучения

$$P\sim\frac{km}{c^2r}P_{\text{э.м.}}\,.$$

В качестве другого примера рассмотрим нерелятивистское движение заряда во внешнем постоянном магнитном поле. Если $v$ — скорость, а $r$ — радиус орбиты, то для электромагнитной и гравитационной энергий излучения получаем соответственно [46, 47]

$$P_{\text{э.м.}} \sim \frac{mc^2}{r/c}\left(\frac{v}{c}\right)^4 \frac{e^2}{mc^2 r} \quad \text{и} \quad P \sim \frac{km^2}{e^2} P_{\text{э.м.}}.$$

Из этих и подобных примеров можно вывести, что величина радиации существенно зависит от отношения гравитационного (соответственно электромагнитного) радиуса источника к длине, характеризующей размеры системы. Двойная звезда может излучать очень большое количество гравитационной энергии, если ее компоненты являются сверхплотными телами, двигающимися близко друг возле друга [9].

Как уже упоминалось во введении, общая теория относительности применялась к проблеме последней стадии эволюции звезд. Эта проблема рассмотрена в [11, 48]. Однако для полноты мы сошлемся на формулу Чандрасекара [49] для максимальной массы холодной звезды (белый карлик), поддерживаемой в равновесии давлением вырожденного электронного газа. Элементарное рассмотрение [50] показывает, что для устойчивости такой звезды необходимо, чтобы ее масса не превышала величину порядка

$$\frac{1}{M^2}\left(\frac{\hbar c}{k}\right)^{3/2}, \tag{39}$$

где $M$ — масса протона. Численная величина (39) того же порядка, что и масса Солнца. Этот впечатляющий результат должен предостеречь нас от поспешных выводов о возможности и желательности соединения различных физических теорий. Формула Чандрасекара была выведена на основе ньютоновской теории гравитации. Поправки на ОТО существенны, когда мы имеем дело с нейтронными звездами — гипотетическими объектами, поддерживаемыми в равновесии давлением вырожденного газа, состоящего из нейтронов и других барионов. В этом случае максимальная масса также порядка величины (39). Вопрос о том, что́ произойдет со звездой, имеющей массу значительно больше, чем (39), известен как проблема коллапса.

Несомненно, что гравитационные явления, так же как и все другие, имеют квантовый «фон». Современная «классическая» теория гравитации Эйнштейна является, конечно, лишь приближением более точной теории, которая примет во внимание квантовую природу микромира. Вероятно, все физики согласятся с этим общим утверждением. Многие теоретики имеют сложившиеся взгляды на то, как построить квантовую теорию гравитации. Широко распространено мнение, что это должно быть осуществлено по примеру электродинамики, т. е. рассматривая метрический тензор как потенциал и заменяя некоторые его компоненты операторами, подчиненными соответствующим коммутационным правилам, и т. д. Несмотря на возникающие трудности, обусловленные общей инвариантностью и нелинейностью уравнений, такая программа может быть выполнена. Можно вычислить, по крайней мере в низших порядках, гравитационные поправки к энергетическим уровням и оценить сечения процессов с участием гравитонов [51–53]. Однако некоторые физики считают, что не всякая физическая теория может быть квантована так же, как электродинамика [54]. Эта процедура не может быть, конечно, применена к статистическим теориям. С другой стороны, трудно думать, что современная теория гравитации каким-то образом аналогична термодинамике. Аналогия между теориями Эйнштейна и Максвелла столь наглядна, что противники идеи квантующегося гравитационного поля находятся в меньшинстве. Становясь на сторону большинства, оценим порядки величин гравитационных релятивистских квантовых эффектов. Забывая о трудностях

ОТО, безразмерный интеграл действия для поля $\Psi$ материи, взаимодействующего с полем гравитации, запишем символически в виде

$$\frac{1}{\hbar c}\int\left[\frac{1}{k}(\nabla\varphi)^2+4\pi\varrho\varphi+(\nabla\Psi)^2\right]d\Omega.$$

Принимая $\hbar = c = 1$ и вводя $\Phi = \varphi/\sqrt{k}$, получим

$$\int[(\nabla\Phi)^2+4\pi l\varrho\varphi+(\nabla\Psi)^2]\,d\Omega,$$

где $l$ дается выражением (33) и играет роль константы связи. Можно ожидать, что гравитационные квантовые эффекты будут пропорциональны степеням $l/\lambda$, где $\lambda$ — характерная для рассматриваемого процесса длина волны. Другими словами, эти эффекты могут быть заметны лишь при чрезвычайно высоких энергиях. По-видимому, квантование гравитационного поля общепринятым способом не может привести к каким-либо значительным эффектам, по крайней мере в области энергий, доступных сейчас и в ближайшем будущем. Однако мы должны помнить, что ОТО является также теорией пространства-времени. Основной гипотезой этой теории является непрерывность пространства-времени, или, более точно, его тождественность дифференцируемому многообразию. Это предположение казалось хорошо обоснованным в рамках классической физики. Однако далеко не очевидно, что оно будет выполняться при учете квантовых эффектов. В теориях, базирующихся на непрерывности пространственно-временно́го многообразия, заранее предполагается, что сколь угодно близкие события могут быть опознаны, отличены одно от другого. Если вспомнить соотношение неопределенности и ограниченность размеров элементарных частиц, то становится неясным, как это сделать. Можно думать, что это действительно невозможно. Невозможность этого должна быть объяснена самой структурой пространства-времени подобно тому, как локальная неразличимость инертной и гравитационной масс была объяснена в ОТО. Очевидно, что любое изменение фундаментального предположения о непрерывной структуре пространства-времени приведет к глубокому пересмотру всей физики.

Недавно Зельдовичем [55] был предсказан новый общерелятивистский эффект, получивший название гравитационного эффекта Зеемана. В гравитационном поле вращающегося тела локальная инерциальная система координат вращается по отношению к инерциальной системе, находящейся на бесконечности. Для читателя с математическим образом мысли сформулируем это следующим образом: в стационарном, но нестатическом пространстве-времени перенос Ферми отличается от переноса Ли, определяемого группой времениподобных изометрий [56]. В соответствии с ранее сказанным на расстоянии $r$ от тела, имеющего угловой момент $S$, угловая скорость вращения инерциальной локальной системы координат имеет порядок $kS/c^2r^3$. Если тело массы $M$ имеет угловую скорость $\omega$, то на поверхности тела

$$kS/c^2r^3 \sim \omega kM/c^2r. \tag{40}$$

Поэтому спектральная линия, излученная источником на поверхности вращающегося тела, будет расщеплена для далекого наблюдателя на две компоненты с частотами, отличающимися на величину порядка (40).

## 6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ

Некоторые из эффектов, предсказанных ОТО (например, смещение перигелия), вносят поправки к ньютоновским явлениям, другие (например, искривление луча света) можно вывести из принципа эквивалентности. Но есть также такие эффекты, которые существенным образом зависят от новых степеней свободы гравитационного поля. Например, вращательные эффекты, упомянутые в предыдущей главе, зависят от «векторной части» гравитационного потенциала. По-видимому, наиболее интересным среди предсказаний последнего типа является возможность существования гравитационных волн. Некоторое время тому назад эта проблема имела противоположный характер. Например, развивалась точка зрения, что уравнения поля ОТО не допускают какого-либо решения типа плоских волн или что гравитационное излучение запрещено уравнениями движения. Проблема существования гравитационных волн интересна сама по себе и важна для программы квантования. Нет смысла говорить о гравитонах, если гравитационные волны исключаются классическими уравнениями. Большое количество разнообразных и детальных работ, выполненных в течение последних десяти лет, показывает, что в рамках понятий теории не может быть сомнений в существовании гравитационных волн. Более того, из этих исследований выяснилось, что количественные оценки и фундаментальные свойства радиации находятся в согласии с предсказаниями линейного приближения [47]. Этот факт иногда рассматривали как вызывающий сомнения. Настоящий раздел, основанный на [43], посвящен обзору некоторых последних теоретических работ по гравитационным волнам.

Применяя теорию гравитации, можно более точно оценить количество энергии, уносимой из ограниченной материальной системы гравитационными волнами. Это достаточно легко сделать в линейной теории поля с массой 0 и спином 2. Для определения потока энергии используем канонический тензор энергии-импульса. Тогда получим формулу

$$P=\frac{1}{45}\frac{k}{c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}. \tag{41}$$

Здесь мультипо́лями более высоких порядков мы пренебрегли.

Ситуация не так проста в ОТО, где уравнения поля настолько сложны, что точных, имеющих физический смысл волновых решений не найдено. Более того, как мы установили в разделе 4, само понятие гравитационной энергии в этой теории до некоторой степени смутное. Чтобы оценить излученную энергию, необходимо установить приближенный метод решения уравнений поля и дать рецепт вычисления изменений полной энергии системы. Различные подходы к изучению гравитационной радиации можно классифицировать в соответствии с методами решения этих двух проблем.

Эйнштейн [57] предложил способ получения приближенных решений уравнений поля для случая слабых полей. Он ограничился координатными системами, которые носят сейчас название гармонических. Положим $g_{ik}=\eta_{ik}+\underset{1}{h}_{ik}$ и пренебрежем всеми членами в $G_{ik}$, не линейными по $\underset{1}{h}$ (здесь и далее $\eta_{ik}$ обозначает метрический тензор Минковского плоского пространства-времени). Возьмем запаздывающее решение линеаризованных уравнений, подставим его в канонический псевдотензор энергии-импульса, проинтегрируем полученный вектор Пойнтинга по большой сфере, тогда опять придем к (41). Этот подход критиковался с нескольких позиций: приближение слабого поля пренебрегает существенной особенностью уравнений Эйнштейна — их нелинейностью; он, по существу, эквивалентен замене ОТО линейной теорией гравитации в плоском пространстве. Такой подход допускает строго периодические поля излучения, тогда как ясно, что радиация в ОТО должна сопровождаться вековыми эффектами. В различных контекстах Синг [58] предлагает следующую интерпретацию приближенных решений: они могут рассматриваться как точные решения для другого распределения материи, которое определяется из уравнений Эйнштейна. Если ее применить к волновому решению в приближении слабого поля, то мы обнаружим, что соответствующий поток материи в точности уравновешивает поток гравитационного излучения, вычисленный по псевдотензору.

Здравой точкой зрения кажется та, в соответствии с которой решения «слабого поля» рассматриваются как первый шаг в схеме последовательных приближений (метод «быстро движущихся приближений»). Основания такой схемы развивались некоторыми авторами [59, 60]. В работе [61] во втором приближении были получены радиационные поправки к движению точечных масс. Однако в общем случае далеко не ясно, является ли этот метод «сходящимся» или, более того, можно ли его продолжать после первого шага. Для обоснования этих сомнений можно привести следующий довод. Типичная компонента $\underset{1}{h}_{ik}$ имеет форму расходящейся волны $\underset{1}{a}(t-r)/r$ (считаем $\underset{1}{a}(t)$ исчезающим вне интервала $(t_0, t_1)$). В гармонических координатах уравнение для поправок второго порядка $\underset{2}{h}_{ik}$ символически имеет вид

$$\square \underset{2}{h} = Q(\underset{1}{h}), \tag{42}$$

где выражение $Q(\underset{1}{h})$ квадратично по функциям $\underset{1}{h}$ и их производным, а $\square$ — волновой оператор в плоском пространстве. Если положить $\underset{2}{h} = \psi/r$, ввести нулевые координаты $u = t - r$ и $v = t + r$ и пренебречь в $Q$ членами порядка $O(1/r^3)$, то (42) можно записать как

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v} = \frac{f(u)}{v-u},$$

где $f \sim \dot{a}^2$. Интегрирование этого уравнения дает

$$\psi(u, v) = \underset{2}{a}(u) + \underset{2}{b}(v) + \int_{t_0}^{u} f(t) \log(v-t)\, dt,$$

где $\underset{2}{a}$ и $\underset{2}{b}$ — произвольные функции. Мы можем исключить $\underset{2}{b}$ на том основании, что оно соответствует приходящей волне. Для $u = \text{const} > t_0$ и $u > v$, $v \gg t_1 - t_0$, имеем [13]

$$\psi \sim \log(v-t_0) \int_{t_0}^{u} f(t)\, dt.$$

Другими словами, для больших $r$ и $t - r = \text{const}$ поправки второго порядка могут вести себя как $\log r/r$. Если бы точная метрика вела себя таким же образом, то это противоречило бы условиям излучения Зоммерфельда и невозможно было бы вычислить поток излучения. Весьма вероятно, что эту трудность можно разрешить, выбирая не гармонические, а другие координатные условия.

Метод быстро движущихся приближений плохо подходит для систем, состоящих из свободно гравитирующих тел, таких, как планетарная система. В первом порядке уравнения движения, полученные таким способом, тривиальны (нет взаимодействия). Эйнштейн, Инфельд и Гофман [62] и Фок [63] предложили новый метод, который в первом приближении приводит к ньютоновским уравнениям движения. Это достигается тем, что такие члены, как

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{km}{c^2 r}, \tag{43}$$

рассматриваются как величины одного и того же (второго) порядка. Формально такой подход заключается в разложении всех функций в ряды по степеням $1/c$. Этот метод годится (т. е. он быстро «сходится») для тех случаев, когда обе величины (43) малы. Это подразумевает, в частности, что должно выполняться

$$\frac{km}{c^2} \ll r \ll \lambda,$$

где $T = \lambda/c$ — характерный для рассматриваемой системы интервал времени. Следовательно, этот метод плохо подходит для оценок излучения, выполняемых при помощи поверхностного интеграла типа (37): интегрирование должно производиться по поверхности сферы в волновой зоне, т. е. для $r \gg \lambda$. Из простых эвристических аргументов следует, что первые члены рядов для компонент метрического тензора имеют вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \underset{2}{g_{00}} + \underset{4}{g_{00}} + \ldots, \\ g_{0\alpha} &= \qquad\ \underset{3}{g_{0\alpha}} + \underset{5}{g_{0\alpha}} + \ldots, \\ g_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + \underset{2}{g_{\alpha\beta}} + \underset{4}{g_{\alpha\beta}} + \ldots \end{aligned}$$

и что первыми членами, которые могут соответствовать гравитационному излучению, являются $\underset{5}{g_{\alpha\beta}}$, $\underset{6}{g_{0\alpha}}$, $\underset{7}{g_{00}}$ [64–67]. Являются ли эти члены истинными или они тривиальны (т. е. могут быть обращены в нуль при помощи координатных преобразований), зависит от того, не равен ли нулю линеаризованный тензор кривизны $\underset{7}{R_{\alpha 0 0 \beta}}$ или равен. В выборе волновых полей имеется большая степень произвола; она соответствует свободе в выборе граничных условий. Как только поле, вплоть до некоторого порядка, задано, можно вывести соответствующие уравнения движения. Волновые поля ($\underset{5}{g_{\alpha\beta}}$, $\underset{6}{g_{0\alpha}}$, $\underset{7}{g_{00}}$) приводят в пятом порядке к тормозящей силе (нулевым порядком считаются уравнения Ньютона). Подходящий выбор волновых членов для системы двух тел дает тормозящую силу, величина которой согласуется с уменьшением энергии системы, вычисленным по (41). Этот результат, принадлежащий Пересу [68], подтверждает применимость метода «слабого поля» для изучения гравитационной радиации.

Чтобы дать удовлетворительный и убедительный теоретический ответ на вопрос о гравитационном излучении, необходимо получить точное, или в достаточной степени точное, решение уравнений Эйнштейна для физически приемлемого распределения материи. Кроме того, надо показать, что соответствующая материальная система испытывает вековые изменения, ответственность за которые может быть возложена на гравитационные волны, излучаемые системой. До сих пор это является трудной задачей. В частности, очень трудно найти интересные и физически понятные нестатические решения внутренней задачи и связать их с подходящими внешними полями. Однако ряд важных глобальных свойств материальной системы, таких, как ее масса или полный момент, можно узнать, изучая ее поле на большом расстоянии. Подобным образом, чтобы вычислить при помощи вектора Пойнтинга излученную энергию, достаточно узнать поле в далекой области. Выяснение этих фактов является отправным пунктом ряда исследований по асимптотическому поведению гравитационных полей.

В качестве первого шага дадим нестрогую формулировку условий излучения Зоммерфельда для гравитационного поля [13, 69]. По аналогии с электродинамикой потребуем, чтобы риманово пространство-время допускало координатную систему $(x^i)$, изотропное векторное поле ненулевой дивергенции $k^i$ и параметр $r$ вдоль траекторий поля, такой, что

$$g_{kl} = \eta_{kl} + h_{kl}, \qquad h_{kl} = O(1/r), \tag{44}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} = i_{kl}k_m + O(1/r^2), \quad i_{kl} = O(1/r), \tag{45}$$

$$k_i = O(1), \quad \frac{\partial k_i}{\partial x^j} = O(1/r) \tag{46}$$

и

$$\left(i_{kl} - \frac{1}{2}\eta_{kl}\eta^{mn}i_{mn}\right)k^l = O(1/r^2). \tag{47}$$

Уравнение (47) означает, что координаты асимптотически являются гармоническими; уравнение (45) заключает в себе условия Зоммерфельда:

$$k^m\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} = O(1/r^2).$$

Координатные преобразования

$$x^i \to x'^i = x^i + a^i \tag{48}$$

с

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = b_ik_j + O(1/r^2), \qquad b_i = O(1/r) \tag{49}$$

сохраняют (44), (45) и (47). В самом деле, из (49) следует, что

$$\frac{\partial^2 a_k}{\partial x^l\,\partial x^m} = c_kk_lk_m + O(1/r^2), \quad c_k = O(1/r)$$

и (48) индуцирует преобразования

$$i_{kl} \to i'_{kl} = i_{kl} + c_kk_l + c_lk_k. \tag{50}$$

В асимптотической области канонический псевдотензор энергии-импульса

$$\tau_i^j = \tau k_ik^j + O(1/r^3),$$

где

$$\tau = \frac{1}{32\pi k}i^{mn}\left(i_{mn} - \frac{1}{2}\eta_{mn}\eta^{pq}i_{pq}\right).$$

Вследствие (47) $\tau$ не может быть отрицательным и является инвариантным при координатных преобразованиях (50). Поэтому можно получить полную излученную энергию и импульс, вычисляя соответствующий интеграл от $\tau_i^j$. Недавно Корниш [70] показал, что для широкого класса псевдотензоров энергии-импульса величина интеграла не зависит от формы $\tau_i^j$ при условии, что выполняются граничные условия (44)—(47). В одной из ранних работ Комар [71] предложил более удовлетворительную, чем рассмотренная здесь, формулировку граничных условий. Он выразил эти условия в терминах асимптотических полей Киллинга.

Из наших граничных условий можно также получить асимптотическую форму тензора кривизны. Положим

$$\frac{\partial i_{kl}}{\partial x^m} = j_{kl}k_m + O(1/r^2), \quad j_{kl} = O(1/r),$$

$$\left(j_{kl} - \frac{1}{2}\eta_{kl}\eta^{mn}j_{mn}\right)k^l = O(1/r^2)$$

и

$$R_{hlmn} = \frac{1}{2} k_{[k}l_{l]}{}_{[m}k_{n]} + O(1/r^2), \tag{51}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметричную часть. Та часть тензора Римана, которая ведет себя как $1/r$,— алгебраически того же типа, что и тензор Римана плоской волны (говорят, что это нулевой тип *) Петрова). Поскольку граничные условия накладываются на метрику, это означает, что $1/r$-часть уравнений поля удовлетворяется автоматически. Чтобы получить более детальную информацию о физике и геометрии волнового пространства, необходимо с большей точностью решить уравнения поля. Рассмотренная формулировка мало подходит для этой цели.

Бонди был первым, кто систематическим образом рассмотрел достаточно общие метрики, описывающие излучение ограниченного источника [72, 73]. Он ограничился аксиально симметричными полями и постулировал форму линейного элемента

$$ds^2 = r^2 [e^{\alpha} (d\theta - A\, du)^2 + e^{-\alpha} \sin^2\theta\, d\varphi^2] - C\, du^2 - 2D du dr \tag{52}$$

так, что площадь поверхности $u = \text{const}, r = \text{const}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ равна $4\pi r^2$. Бонди предположил, что для достаточно больших значений $r$ функции $\alpha$, $A$, $C$ и $D$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{n}{r} + O(1/r^2), \\ A &= \frac{a}{r} + O(1/r^2), \\ C &= 1 - \frac{2m}{r} + O(1/r^2), \\ D &= 1 + \frac{d}{r} + O(1/r^2), \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

где $a$, $m$, $n$, $d$ зависят только от $u$ и $\theta$. Эти предположения означают, что (52) можно преобразовать к координатной системе, декартовой на бесконечности, в которой будут удовлетворяться условия излучения (44)—(47). Бонди показал, что разложения (53) совместны с уравнениями поля в пустом пространстве, и, решив некоторые из этих уравнений, нашел, что $a = d = 0$, и получил связь между $m$ и $n$

$$\frac{\partial m}{\partial u} = -\left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} n \sin^2\theta. \tag{54}$$

Имеются также другие уравнения, связывающие $m$ и $n$ с членами более высокого порядка, но мы не будем рассматривать их. Из анализа явствует, что $m$ может быть совершенно произвольной функцией своих аргументов; ее производная по $u$ называется функцией информации. Функция $m$ тесно связана с полной энергией системы. В статическом случае $\frac{\partial m}{\partial u} = 0$ из других уравнений следует, что $\frac{\partial m}{\partial\theta} = 0$; следовательно, $m$ можно считать массой. В общем случае Бонди определяет массу как среднее от $m$ по углу:

$$M(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} m(u, \theta) \sin\theta\, d\theta.$$

---

*) Его называют также вторым вырожденным типом Петрова (см. Дополнение). (*Прим. перев*).

Уравнение (54) означает, что масса уменьшается:

$$\frac{dM}{du} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2 \sin\theta \, d\theta,$$

тогда и только тогда, когда имеется функция информации. Ясно, что $\partial n/\partial u$ играет роль величины, которую мы раньше обозначали как $i_{kl}$. Общая форма тензора Римана такова [76]:

$$R = \frac{N}{r} + \frac{\mathrm{III}}{r^2} + \frac{D}{r^3} + \ldots, \tag{55}$$

где индексы не выписаны, а $N$, $\mathrm{III}$, $D$ обозначают тензоры кривизны нулевого, третьего и вырожденного *) типов Петрова соответственно (см. раздел 7). Эти тензоры допускают $k_i$ в качестве собственного нуль-вектора **), ковариантно постоянного вдоль лучей, кроме того, они пропорциональны величинам, которым можно придать физический смысл:

$$N \sim \frac{\partial^2 n}{\partial u^2}, \quad \mathrm{III} \sim \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial\theta} n \sin^2\theta, \quad D \sim 2m + \frac{\partial n^2}{\partial\theta}.$$

Только первый из этих результатов можно получить из (51).

Другая техника решения уравнений поля развивается Ньюманом и Пенроузом [74]. Они вводят поле нулевых базисных векторов (тетрад), связанных с конгруэнцией лучей, имеющих ненулевую дивергенцию и ортогональных к гиперповерхности в $V_4$. Если $k_i$ — касательный к лучу вектор, нулевой тетрадой является $(k_i, l_i, m_i, m_i^*)$. Векторы нормированы так, что $k_i l^i = 1 = -m_i m^{*i}$, а остальные скалярные произведения равны нулю. При наличии такой тетрады тензор Римана пустого пространства-времени можно представить в виде

$$R = N(k) + \mathrm{III}(k) + D(k,\ l) + \mathrm{III}(l) + N(l); \tag{56}$$

здесь $N(k)$ обозначает тензор нулевого типа Петрова, допускающий $k_i$ в качестве волнового вектора; $D(k, l)$— вырожденный тензор, допускающий два собственных нуль-вектора $k_i$ и $l_i$ (см. раздел 7). Ньюман и Пенроуз вводят как одну из координат аффинный параметр $r$ вдоль луча и заменяют уравнения Эйнштейна системой уравнений первого порядка для коэффициентов вращения Риччи, соответствующих нулевому ортогональному базису. В общих чертах их результат об асимптотическом поведении тензора Римана в пустом пространстве состоит в следующем: если $N(l) = O(1/r^5)$, то $\mathrm{III}(l) = O(1/r^4)$, $D(k,l) = O(1/r^3)$, $\mathrm{III}(k) = O(1/r^2)$, $N(k) = O(1/r)$. Это находится в согласии с (55) и с более ранними точными результатами о поведении тензора кривизны для алгебраически специальных метрик [75, 76].

Другим важным результатом об асимптотическом поведении гравитационных волн является «теорема о волновом фронте», которую в различных формах независимо друг от друга доказали Папапетру [77], Перес и Розен [78], Инфельд и Плебанский [79] и Мизнер [80]. Папапетру показал, что не существуют периодические, нестатические и асимптотически евклидовы метрики; возможны только пульсирующие волны с амплитудой возмущения, достаточно быстро убывающей при $t \to \pm\infty$. Инфельд и Плебанский

*) Этот тип тензора кривизны называют также первым вырожденным типом Петрова (см. Дополнение). (*Прим. перев.*)

**) Вместо употребляемых автором терминов «нулевой вектор», «нулевая геодезическая», «нулевая гиперповерхность» говорят также «изотропный вектор», «изотропная геодезическая», «изотропная гиперповерхность». (*Прим. перев.*)

доказали, что предположение

$$g_{ik} = \eta_{ik} + O(1/r), \tag{57}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} = O(1/r), \quad \text{но не } O(1/r^2) \quad \text{для} \quad t = \text{const} \tag{58}$$

приводит к противоречиям с уравнениями поля.

В самых общих чертах их аргументом является следующий. Предположим, что при определенном выборе координат на некоторой пространственноподобной гиперповерхности $t = \text{const}$ компоненты метрического тензора таковы, что (57), (58) выполняются. Для некоторых, относящихся к рассматриваемой проблеме, компонент $g_{ik}$ уравнения поля символически можно записать как

$$\Delta\varphi = \text{const}\,(\nabla\varphi)^2.$$

Если правая часть действительно ведет себя как $1/r^2$, то $\varphi$ содержит член типа $\log r$, что противоречит (58).

Арновитт, Дезер и Мизнер [80] сформулировали и строго доказали теорему о волновом фронте в более сильной форме: если (57) выполняется, то для каждого $t = \text{const}$ можно ввести дополнительные ограничения на координаты

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = O\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}\right),$$

$$K_{\alpha\beta} = O\left(\frac{1}{r^{3/2+\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ и $K_{\alpha\beta}$ — вторая фундаментальная форма гиперповерхности $t = \text{const}$.

## 7. ГЕОМЕТРИЯ НУЛЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Легко убедиться в существовании тесной связи между волнами и нулевыми элементами пространства-времени. Для такой связи имеются очевидные физические причины. Электромагнитные и гравитационные волны распространяются со скоростью света. В четырехмерном пространстве-времени мировой линией света является нулевая геодезическая; электромагнитный тензор плоской распространяющейся волны есть $k_{[i}m_{j]}$ с нулевым $k^i$; проблему Коши нельзя локально сформулировать на нулевой гиперповерхности.

Возможность передачи информации при помощи волн также связана с нулевым характером соответствующей им геометрической структуры. При изучении асимптотических свойств волновых полей мы уже видели, какую роль играют нулевые элементы. В последние годы написано большое число работ о римановых пространствах с отличающимися нулевыми структурами. По этому вопросу имеются описательные статьи с простым изложением [81–84]. Здесь нет необходимости подробно разбирать эти работы. Ниже мы лишь кратко перечислим некоторые важные результаты.

Статью Пирани [85] о физическом смысле проведенной Петровым классификации тензоров кривизны [86, 87] можно рассматривать как отправной пункт нынешней тенденции использовать геометрические методы в гравитационной волновой теории. Классификация Петрова сама по себе является объектом многочисленных исследований и представлений. Описание различных направлений и обширная библиография содержатся в обзорной статье Пирани [81]. Для наших целей достаточно вспомнить спинорный подход [88]. Имеется одно-однозначное соответствие между направлениями в спинорном пространстве (т. е. в двумерном комплексном векторном пространстве) и нулевыми направлениями в векторном пространстве Минковского; каждый вещественный тензор, принадлежащий неприводимому представлению $D(s, 0) \oplus D(0, s)$ однородной группы Лоренца, может быть представлен симметричным спинором $2s$ индексов $\varphi_{AB\ldots K}$; каждый *такой спинор может быть факторизован (круглые скобки обозначают симметризацию)*:

$$\varphi_{AB\ldots K} = \xi_{(A}\eta_B \ldots \chi_{K)}.$$

Поэтому любой ненулевой тензор типа $D(s, 0) \oplus D(0, s)$ определяет $2s$ нулевых направлений (называемых главными), некоторые из которых могут совпадать. Кратное главное нулевое направление называется направлением распространения. Классификация Петрова в формулировке Пенроуза заключается в перечислении всех возможных совпадений среди главных нулевых направлений. Тензор Римана для случая пустого пространства и тензор конформной кривизны Вейля для любого случая соответствуют $s = 2$. Они определяют 4 нулевых направления. Конформный тензор принадлежит к типу I, если все направления различны; при совпадении двух, трех или четырех направлений получаем соответственно II, III или $N$ (нулевой) тип. Тип $D$ имеет место при наличии двух различных пар совпадающих главных нулевых направлений. Пространство называется алгебраически специальным, если его тензор Вейля не принадлежит *к типу* I. *Для электромагнитного поля* $s = 1$ *и имеются только два типа* тензоров. Плоские волны и подобные простые виды радиации принадлежат к нулевому типу, метрика Шварцшильда — к типу $D$; совершенно ясно, что общее физически реальное пространство-время принадлежит к типу I.

Алгебраически специальная, конформно неплоская метрика определяет преимущественное поле нулевых направлений — направлений распространения ($D$-метрика определяет два таких поля). В свою очередь это поле направлений определяет конгруэнцию лучей в пространстве-времени. Можно думать, что эти лучи соответствуют особой модели распространения света [89]. В специальных случаях, типа случая плоских волн, повторяющиеся главные нулевые направления можно интерпретировать как направления распространения гравитационной радиации. Эти замечания служат иллюстрацией того, какой интерес проявляется к свойствам лучей, в частности тех, которые связаны с алгебраически специальными метриками.

Пусть дана конгруэнция лучей, т. е. нулевых геодезических, которые могут и не соответствовать главным нулевым направлениям. Касательные векторы можно нормировать так, чтобы $k_{i;\,j}\,k^j = 0$. Тогда из первых производных от $k_i$ можно образовать три и только три скаляра: коэффициент вращения

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} k_{[i;\,j]}\, k^{i;\,j}}\,,$$

растяжение

$$\theta = \frac{1}{2} k^i{}_{;\,i}$$

и сдвиг

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} k_{(i;\,j)}\, k^{i;\,j} - \theta^2}\,.$$

Этим величинам можно дать простую оптическую интерпретацию [75], считая нулевые геодезические лучами света. Рассмотрим маленький плоский непрозрачный предмет и плоский экран, расположенный на некотором расстоянии от предмета. Предположим, что предмет и экран ориентированы так, что в своих системах покоя они ортогональны лучам света, а расположение их таково, что отбрасываемую предметом тень можно наблюдать на экране. При помощи параллельного переноса вдоль лучей предмет можно сместить в положение, занимаемое экраном, и сравнить его со своей тенью. Тогда увеличение тени пропорционально $\theta$, вращение пропорционально $\omega$ и $\sigma$ характеризует сдвиг (деформацию).

Гольдбергу и Саксу [90] принадлежит следующая теорема: метрика в вакууме является алгебраически специальной в том и только в том случае, если она содержит конгруэнцию лучей без сдвига; вектор, касательный к лучу конгруэнции, принадлежит направлению распространения конформного тензора кривизны.

Сакс проинтегрировал некоторые из уравнений поля в пустом пространстве, чтобы получить точное поведение алгебраически специальных тензоров вдоль лучей [75]. Мы процитируем только один из его результатов: для алгебраически специального пустого пространства-времени с $\omega = 0 \neq \theta$ тензор Римана имеет вид

$$R = \frac{N}{r} + \frac{\mathrm{III}}{r^2} + \frac{\mathrm{II}}{r^3}. \tag{59}$$

Здесь $N$, III, II — ковариантно постоянные вдоль лучей тензоры типа, указанного их обозначениями; $r$ — аффинный параметр. Можно усилить этот результат, доказав, что тензор II должен принадлежать типу $D$, и найдя точную форму линейного элемента [91,92].

Интересно сравнить точный результат (59) с аналогичной формулой, полученной аппроксимационными методами (см. раздел 6). Совпадение трех первых членов в (56) и (59) можно истолковать как указание на то, что некоторые алгебраически специальные поля являются хорошими приближениями к действительным полям излучения на больших расстояниях от источника. Всё же эти поля слишком специальные, чтобы быть реалистичными. Интересная связь между волновыми уравнениями ОТО и нулевыми тензорами кривизны была обнаружена Захаровым [93].

Прекрасный метод изучения проблем асимптотики для полей с массой 0 был недавно развит Пенроузом [94]. Если не вдаваться в подробности, то лежащие в основе его метода идеи можно суммировать следующим образом. Когда говорят о «бесконечности» некоторого топологического пространства, имеют в виду, что хотя пространство не компактно, оно является локально компактным и добавлением некоторых воображаемых (бесконечных) элементов может быть сделано компактным. Есть много способов сделать локально компактное пространство компактным; некоторые из этих способов могут быть преимущественными, если пространство обладает другими структурами в дополнение к его топологии. Например, пространство Минковского можно сделать компактным, так что его конформная геометрия может быть непрерывно расширена до бесконечных элементов. Более того, уравнения движения полей с массой 0 конформно инвариантны в том смысле, что если даны два конформно связанных друг с другом римановых пространства-времени и решение уравнения поля с массой 0 в одном из них, имеется естественный способ отображения этого решения в решение того же уравнения в другом пространстве. В соответствии с выводами Пенроуза, вместо того чтобы рассматривать асимптотическое поведение полей с массой 0 в некомпактном римановом пространстве, можно изучать их свойства в окрестностях некоторых элементов в компактном пространстве, конформном первому.

Построение многообразия Пенроуза $P$ в случае пространства Минковского $M$ было простым, однако это не так просто сделать в случае риманового многообразия, даже если его топология евклидова. Иногда даже в простых случаях конформную геометрию нельзя расширить за $P$. Такие сингулярности имеют место, например, в пространстве-времени Шварцшильда. Когда космологическая постоянная не равна нулю, гиперповерхности перестают быть нулевыми на бесконечности. С помощью конформной техники Пенроуз дал очень простое доказательство общей теоремы об асимптотической форме полей с массой нуль (peeling-off-теорема). Его метод позволяет применять группы асимптотической симметрии и порождает новый подход к проблеме гравитационной энергии.

## 8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В силу очевидных причин, таких, как нехватка места и неполнота знаний автора, настоящий обзор не исчерпывает всех интересных проблем в общей теории относительности. Для удобства читателей, желающих получить более полные сведения о современных достижениях в ОТО, мы перечислим наиболее важные, не рассмотренные нами вопросы вместе с основными ссылками.

Релятивистская астрофизика уже упоминалась во введении. Кроме обзоров Зельдовича и Новикова, этой теме посвящены также Труды симпозиума в Техасе [95] и монография [96].

В последние годы в космологии не было существенного прогресса. Почти все по этому предмету можно найти в книге Бонди [97] и обзорах Гекмана и Шюкинга [23] и Зельдовича [10,98]. Интересную работу о сравнении наблюдательных данных с выводами космологических теорий написали недавно Кристиан и Сакс [99].

Проблема движения тяжелых тел, упомянутая в разделах 5 и 6, подробно рассмотрена в монографиях Фока [13] и Инфельда и Плебанского [79]. Интересную работу о проблеме устойчивости планетарных орбит в рамках ОТО доложил на конференции в Тбилиси Абдильдин [100].

Основные аспекты квантования гравитационного поля рассматривали Бергман и Комар [101], Арновитт, Дезер и Мизнер [102] и Де-Вит [103,104]. Среди наиболее важных статей по квантовой теории гравитации работы Гупты [105], Дирака [106], Андерсона [107], Комара [108] и Фейнмана [53].

Наконец, различные наблюдательные и экспериментальные следствия и проверки ОТО рассматривали Гинзбург [5,109], Адам [110], Бертотти, Брилл и Кротков [111]. Дике [112] значительно повысил точность экспериментов Этвеша. Шапиро [6] предложил новый опыт в ОТО, использующий зависимость скорости света от гравитационного потенциала. Работы Брагинского и Вебера уже упоминались во введении.

* * *

Многие физики очень эмоционально относятся к теории Эйнштейна. Большинство из них признает, что общая теория относительности — прекрасная теория, но тут же добавляют, что из-за слабости гравитационных сил теория гравитации расположена несколько в стороне от остальной физики. Некоторые физики идут настолько далеко, что вообще отрицают за ОТО право называться физической теорией.

Менее крайняя позиция состоит в утверждении, что те, кто в настоящее время развивает теорию Эйнштейна, скорее являются математиками, чем физиками. В некоторых кругах релятивисты вообще являются «социально нежелательными элементами». Множество дискуссий начинается или заканчивается упреком, что ОТО подверглась слишком малому числу проверок — как будто это недостаток самих релятивистов. Есть много причин для этих недоразумений. С одной стороны, некоторые релятивисты рассматривают теорию Эйнштейна как вышестоящую по отношению к другим теориям и считают, что она в конце концов объединит все остальные (отсюда поиски «единых теорий»); некоторые из них склонны игнорировать квантовую физику. Такая позиция берет начало от Эйнштейна, который с недоверием относился к квантовой механике с ее статистической интерпретацией. С другой стороны, многие физики, работающие в других областях, не склонны изучать основы римановой геометрии, необходимой для понимания ОТО, и упрекают эту теорию в том, что она не укладывается в схему лоренцинвариантных квантовых полей.

В настоящее время общая теория относительности является наилучшей из имеющихся классических теорий пространства, времени и тяготения. Она представляет исключительный пример теории, имеющей хорошее логическое обоснование, но подтвержденной немногочисленными экспериментальными данными. При таких условиях естественно развивать теорию, насколько это возможно. Конечно, можно ограничить значение слова «физика», исключив многие работы по ОТО из числа физических исследований. Мы сомневаемся в том, что такое ограничение принесет пользу. Несомненно, это противоречило бы общей современной тенденции науки, когда границы между различными сферами исследований становятся все менее и менее резкими. Вместо того чтобы продолжать дискуссию о характере исследований по вопросам ОТО, мы должны заметить следующее: если есть математики, желающие изучать уравнения физических теорий, то их надо приветствовать, а не подвергать остракизму отказом рассматривать их работы как относящиеся к физике.

Институт теоретической физики
Варшавского университета

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Proceedings on Theory of Gravitation, Conference in Warsaw and Jablonna, 1962 (edited by L. Infeld), Gauthiers-Villars, Paris, 1964.
2. Проблемы гравитации. Тезисы докладов 2-й Советской гравитационной конференции (под редакцией М. М. Мирианашвили), Тбилиси, 1965.
3. International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, London, July 1965 (mimeographed proceedings).
4. A. Komar, доклад, см. [3].
5. V. L. Ginzburg, L. J. Schiff, доклады, см. [1].
6. J. J. Shapiro, Phys. Rev. Letts. **13**, 789 (1964); см. также УФН 87, 373 (1965).
7. J. Weber, General Relativity and Gravitational Waves, New York, 1961 (см. перевод: Дж. Вебер, Общая теория относительности и гравитационные волны, М., ИЛ, 1962).
8. J. Weber, доклад, см. [1].
9. В. Б. Брагинский, УФН **86**, 433 (1965).
10. Я. Б. Зельдович, УФН **80**, 357 (1963).
11. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, УФН **84**, 377 (1964); **86**, 447 (1965).
12. A. Einstein, The Meaning of Relativity, Princeton, 1955 (см. перевод: А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, М., ИЛ, 1955).
13. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., Гостехиздат, 1955; доклад, см. [2].
14. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., Гостехиздат, 1955.
15. K. Friedrichs, Math. Ann. **98**, 566 (1927).
16. A. Trautman, Compt. rend. **257**, 617 (1963).
17. E. Cartan, Compt. rend. **174**, 593, 734 (1922).

18. D. W. Sciama, в сб. Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press and PWN, Warszawa, 1962.
19. T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).
20. Д. Д. Иваненко, доклад, см. [1].
21. В. И. Родичев, ЖЭТФ **40**, 1469 (1961).
22. J. L. Anderson, Lecture given at the 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics.
23. O. Heckmann and E. Schücking, Handb. d. Phys. Bd. 53, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
24. N. Rosen, Phys. Rev. **57**, 147, 150 (1940).
25. C. Møller, Mat. Fys. Skr. Dan. Selsk. 1, № 10 (1961).
26. J. Plebanski, доклад, см. [1].
27. В. И. Родичев, *доклад, см.* [2].
28. A. Trautman, Gravitation (ed. by L. Witten), J. Wiley, New York, 1962, гл. 5.
29. C. Cattaneo, доклад, см. [3] (содержит обширную библиографию).
30. E. Nöther, Göttingen Nachrichten, 235 (1918).
31. *K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti Numbers, Princeton*, 1953 (см. перевод: К. Яно и С. Бохнер, Кривизна и числа Бетти, М., ИЛ, 1957).
32. D. Hilbert, Math. Ann. **92**, 1 (1924).
33. J. S. de Wet, Proc. Cambr. Phil. Soc. **43**, 511 (1947).
34. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 675 (1956).
35. P. G. Bergmann, Phys. Rev. **112**, 287 (1958).
36. P. G. Bergmann, Phys. Rev. **75**, 680 (1949).
37. A. Komar, Phys. Rev. **113**, 934 (1959).
38. C. Møller, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **31**, № 14 (1959).
39. A. Einstein, Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. **448** (1918).
40. F. Klein, Göttingen Nachrichten **344** (1918).
41. C. Møller, Ann. Phys. **4**, 347 (1958).
42. C. Møller, доклад, см. [1].
43. A. Trautman, доклад, см. [3].
44. H. Thirring, Fortschr. Phys. **7**, 79 (1959).
45. S. Weinberg, Phys. Rev. **B135**, 1049 (1964).
46. В. И. Пустовойт и М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ **42**, 163 (1962).
47. В. Л. Гинзбург, см. [1], стр. 209.
48. И. Д. Новиков, Я. Б. Зельдович, доклад, см. [3].
49. S. Chandrashekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover, New York, 1957 (см. перевод: С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, М., ИЛ, 1950).
50. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, 2-е изд., М., Физматгиз, 1964, § 109.
51. Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Вестн. МГУ, № 8, 103 (1947).
52. Ю. С. Владимиров, доклад, см. [1].
53. R. P. Feynman, Acta Physica Polonica **24**, 697 (1963).
54. L. Rosenfeld, доклад, см. [1].
55. Я. Б. Зельдович, Письма в редакцию, ЖЭТФ **1** (3), 40 (1965).
56. A. Trautman, Lectures on General Relativity (Brandeis Summer Institute, 1964), Prentice-Hall, 1965.
57. A. Einstein, Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. 688 (1916); 154 (1918).
58. J. L. Synge, Relativity: The General Theory, North Holland, Amsterdam (см. перевод: Дж. Синг, Общая теория относительности, М., ИЛ, 1963).
59. *B. Bertotti and J. Plebanski, Ann. Phys.* **11**, 169 (1960).
60. P. Havas and J. N. Goldberg, Phys. Rev. **128**, 398 (1962).
61. P. Havas, Phys. Rev. **108**, 1351 (1957).
62. A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, Ann. Math. **39**, 65 (1938).
63. В. А. Фок, J. Phys. Sovietunion **1**, 81 (1939).
64. L. Infeld, Phys. Rev. **53**, 836 (1938).
65. N. Hu, Proc. Roy. Irish. Acad. **A51**, 87 (1947).
66. J. N. Goldberg, Phys. Rev. **99**, 1873 (1955).
67. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Scie., Cl. III, 6, 627 (1958).
68. A. Peres, Nuovo Cimento **15**, 351 (1960).
69. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Scie., Cl. III, 6, 407 (1958).
70. F. H. J. Cornish, Proc. Roy. Soc. **A282**, 358, 372 (1964).
71. A. Komar, Phys. Rev. **127**, 1411 (1962).
72. H. Bondi, Nature **186**, 535 (1960).
73. H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, Proc. Roy. Soc. **A269**, 21 (1962).

74. E. T. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. **3**, 566 (1962).
75. R. Sachs, Proc. Roy. Soc. **A264**, 309 (1961); статья в Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press and PWN, Warsaw.
76. R. Sachs, Proc. Roy. Soc. **270**, 103 (1962).
77. A. Papapetrou, Ann. d. Phys. **2**, 87 (1958).
78. A. Peres and N. Rosen, Phys. Rev. **115**, 1085 (1959).
79. L. Infeld and J. Plebanski, Motion and Relativity, Pergamon Press and PWN, Warsawa, 1960 (см. перевод: Л. Инфельд и Е. Плебанский, Движение и релятивизм. Движение тел в общей теории относительности, М., ИЛ, 1962).
80. C. Misner, доклад, см. [1].
81. F. A. E. Pirani, Gravitation (ed. by L. Witten), J. Wiley, New York, 1962, гл. 6.
82. F. A. E. Pirani, Lectures on General Relativity (Brandeis Summer Institute, 1964), Prentice-Hall, 1965.
83. R. Sachs, Relativity, Groups and Topology (Les Houches Summer School, 1963), Gordon and Breach, New York, 1964.
84. J. Ehlers and W. Kundt, Gravitation (ed. by L. Witten), Wiley, New York, 1962, гл. 2.
85. F. A. E. Pirani, Phys. Rev. **105**, 1081 (1957).
86. А. З. Петров, Уч. зап. Казанского ун-та **114**, 55 (1954).
87. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М., Физматгиз, 1961.
88. R. Penrose, Ann. Phys. **10**, 171 (1960).
89. I. Robinson, J. Math. Phys. **2**, 290 (1961).
90. I. N. Goldberg and R. Sachs, Acta Phys. Polon Suppl., **22**, 13 (1962).
91. I. Robinson and A. Trautman, Proc. Roy. Soc. **A265**, 463 (1962).
92. I. Robinson and A. Trautman, доклад, см. [1].
93. В. Д. Захаров, доклад, см. [2].
94. R. Penrose, Proc. Roy. Soc. **284**, 159 (1964); доклад, см. [1].
95. Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse (ed. by I. Robinson et al.), Proceedings of the Second Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Chicago, 1965.
96. B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, J. A. Wheeler, Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago, 1965.
97. H. Bondi, Cosmology, 2nd ed., Cambridge, 1960.
98. Я. Б. Зельдович, Вопросы космогонии **9**, 5 (1963).
99. J. Kristian and R. Sachs, препринт University of Texas, Austin (1964).
100. М. Абдильдин, доклад, см. [2].
101. P. G. Bergmann and A. Komar, в сб. Les Theories Relativistes de la Gravitation, Paris, 1962.
102. R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, Gravitation (ed. by L. Witten), Wiley, New York, 1962, гл. 7.
103. B. DeWitt, Gravitation (ed. by L. Witten), J. Wiley, New York, 1962, гл. 8.
104. B. DeWitt, Relativity, Groups and Topology (Les Houches Summer School, 1963), Gordon and Breach, New York, 1964.
105. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. **A65**, 161, 608 (1952).
106. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 333 (1958).
107. J. L. Anderson, доклад, см. [1].
108. A. Komar, Phys. Rev. **B134**, 1430 (1964).
109. В. Л. Гинзбург, УФН 59, 11 (1956); **63**, 119 (1957); Fortschr. Phys. (Berlin) **5**, 16 (1957).
110. M. A. Adam, Proc. Roy. Soc. **A20**, 297 (1962).
111. B. Bertotti, D. Brill and R. Krotkov, Gravitation (ed. by L. Witten), Wiley, New York, 1962, гл. 1.
112. R. H. Dicke, Relativity, Groups and Topology (Les Houches Summer School, 1963), Gordon and Breach, New York, 1964.

## ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

113. В. А. Фок, УФН **80** (3), 353 (1963).
114. В. А. Фок, УФН **83** (4), 577 (1964).
115. Е. М. Лифшиц и И. М. Халатников, УФН **80** (3), 391 (1963).
116. Я. Б. Зельдович, Неизбежность общей теории относительности, доклад, см. [2].
117. Сб. «Гравитация и относительность». Под редакцией Х. Цзю и В. Гоффмана, М., Изд-во «Мир», 1965.
118. А. Д. Сахаров, ЖЭТФ **49** (1), 345 (1965).
119. В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов, доклад, см. [2].
120. Н. М. Полиевктов-Николадзе, Письма в редакцию ЖЭТФ **2**, вып. 12 (1965).

## ДОПОЛНЕНИЕ*)

## ТИПЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ПО КЛАССИФИКАЦИИ А. З. ПЕТРОВА

Классификацию полей тяготения имеет смысл производить в том случае, если ее удается сформулировать инвариантным образом. Классификация может быть *построена на изучении различных признаков, например, ее можно производить по* алгебраической структуре тензора кривизны или по группам движений, допускаемым тем или иным полем. Мы рассмотрим алгебраическую классификацию. В дальнейшем будет показано, что анализ алгебраических свойств тензора кривизны можно связать с изучением алгебраических свойств матриц. Поскольку нас интересуют инвариантные свойства матриц, мы будем иметь дело с элементарными делителями $\lambda$-матрицы (см. ниже), которые остаются инвариантными при четырехмерных координатных преобразованиях. Прежде чем приступить к изложению классификации Петрова, напомним некоторые сведения из теории элементарных делителей матриц [1].

*Пусть элементами матрицы $A(\lambda)$ ранга $r$ являются полиномы от переменной $\lambda$.* Назовем $A(\lambda)$ $\lambda$-матрицей. Обозначим через $D_i(\lambda)$ общий наибольший делитель миноров $i$-го порядка ($i \leqslant r$); будем считать, что коэффициент при старшем члене в $D_i(\lambda)$ обращен в 1. Так как каждый минор $i$-го порядка можно линейно выразить через миноры $(i-1)$-го порядка, полином $D_i(\lambda)$ делится нацело на полином $D_{i-1}(\lambda)$. Частное от деления $D_i(\lambda)$ на $D_{i-1}(\lambda)$ ($D_0(\lambda)$ считаем равным 1) обозначим через $E_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \ldots, r$).

*Пусть величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ (которые могут быть как вещественными, так* и комплексными) являются корнями полинома $D_r(\lambda)$. Так как $D_r(\lambda)$ делится на все $D_i(\lambda)$, то $D_i(\lambda)$, а следовательно, и $E_i(\lambda)$ будут иметь своими корнями величины из ряда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ Положим

$$E_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_i}(\lambda-\lambda_2)^{m_i'}(\lambda-\lambda_3)^{m_i''}\ldots$$

Те из множителей

$$\begin{matrix}(\lambda-\lambda_1)^{m_1}, & (\lambda-\lambda_1)^{m_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_1)^{m_r},\\ (\lambda-\lambda_2)^{m_1'}, & (\lambda-\lambda_2)^{m_2'}, \ldots, (\lambda-\lambda_2)^{m_r'},\\ (\lambda-\lambda_3)^{m_1''}, & (\lambda-\lambda_3)^{m_2''}, \ldots, (\lambda-\lambda_3)^{m_r''},\end{matrix}$$

которые не приводятся к постоянной, называются элементарными делителями $\lambda$-матрицы.

Будем говорить, что числа $m_i, m_i', m_i'', \ldots$ определяют тип матрицы, для обозначения которого используется символ

$$[(m_1, m_2, \ldots, m_r)(m_1', m_2', \ldots, m_r')(m_1'', m_2'', \ldots, m_r'')\ldots],$$

где в круглые скобки заключены числа, соответствующие одному и тому же корню (базису элементарного делителя). Этот символ называется характеристикой.

Отметим, что элементарные делители инвариантны по отношению к следующим операциям над $\lambda$-матрицей: перестановка строк (или столбцов) матрицы; умножение элементов строки (или столбца) на постоянное число, отличное от нуля; прибавление к элементам какой-нибудь строки (или столбца) соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на один и тот же полином от $\lambda$. Применение этих операций называется элементарным преобразованием $\lambda$-матрицы.

*Классификация полей тяготения [2], связанная с изучением алгебраической* структуры тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ **), была развита для пространств Эйнштейна, т. е. для римановых многообразий, в которых выполняются уравнения поля

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

В физических исследованиях главным образом встречается частный случай пространств Эйнштейна: свободное (или пустое) пространство; его размерность $n$ равна 4, сигнатура метрики имеет вид $(-\,-\,-\,+)$, а уравнения поля записываются в виде

$$R_{\alpha\beta}=R^{\sigma}_{\alpha\sigma\beta}=0. \tag{1'}$$

---

*) В обзоре А. Траутмана классификация гравитационных полей, данная А. З. Петровым, считается известной. Она изложена в основном в книге А. З. Петрова «Пространства Эйнштейна». Для того чтобы читатель УФН мог разобраться в статье Траутмана, не прибегая по возможности к оригинальной литературе, редакция поручила Л. П. Грищуку (ГАИШ) составить предлагаемое «Дополнение». (*Прим. ред.*)

**) *Греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, латинские — 1, 2, 3.*

Свободное пространство обозначается символом $T$. Рассмотрим классификацию для этого случая.

Как известно, ковариантные компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождествам

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-R_{\beta\alpha\gamma\delta}=-R_{\alpha\beta\delta\gamma}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0, \tag{2'}$$

определяющим для ковариантных составляющих $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ все алгебраические условия в том смысле, что всякое другое тождество является следствием этих условий.

Поскольку нас интересует только алгебраическая структура тензора кривизны, наше исследование будет основано на соотношениях (1′), (2) и (2′), причем рассмотрение будет производиться в некоторой точке $P$ пространства $T$.

Поставим в соответствие каждой кососимметрической паре индексов $\mu\nu$ один так называемый собирательный индекс (смысл этой операции выяснится в дальнейшем). Из двух компонент тензора кривизны, отличающихся знаком и несущих индексы $\mu\nu$ и $\nu\mu$, фиксируем только одну. Очевидно, что число собирательных индексов равно 6. Все собирательные индексы перенумеруем, например, следующим образом: $14\to 1$, $24\to 2$, $34\to 3$, $23\to 4$, $31\to 5$, $12\to 6$. Таким образом, тензору кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства $T$, заданному в точке $P$, будет соответствовать тензор $R_{ab}$ ($a, b=1, 2, \ldots, 6$), заданный в некотором шестимерном пространстве, связанном с этой точкой. Обозначим это пространство буквой $R_6$. Ясно, что симметрия тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в отношении перестановки кососимметрических пар индексов приводит к симметричности тензора $R_{ab}$.

Произвольным четырехмерным преобразованиям в пространстве $T$ соответствуют не все допустимые преобразования в $R_6$, а лишь определенный класс этих преобразований.

Теперь необходимо в пространстве $R_6$ ввести метрику. Это естественно и удобно сделать, вводя метрический тензор $g_{ab}$, определенный следующим образом:

$$g_{ab} \longrightarrow g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} \tag{3}$$

(при таком выборе, например, поднятие и опускание индексов в $R_6$ соответствует поднятию и опусканию пар индексов в $T$). Тензор $g_{ab}$ является симметричным и невырожденным ($|g_{ab}| \neq 0$).

Если мы теперь тензору $R_{ab}$ сопоставим $\lambda$-матрицу

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab}) \tag{4}$$

и найдем ее элементарные делители, то тип пространства будет определяться характеристикой $\lambda$-матрицы и сохраняться в той области, содержащей точку $P$, где характеристика не меняется.

Таким образом, вводя шестимерное пространство $R_6$, мы свели вопрос о классификации к исследованию $\lambda$-матрицы (4).

Построим в данной точке ортогональный репер $\underset{6}{\xi^{\alpha}}$, относительно которого

$$(g_{\alpha\beta})_P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

тогда $(g_{ab})_P$ можно представить в виде

$$(g_{ab})_P=\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\varepsilon$ — трехмерная единичная матрица.

Чрезвычайно важным оказывается тот факт, что матрица $(R_{ab})$ относительно репера (5) является симметрично-сдвоенной, т. е. может быть записана в виде

$$(R_{ab})=\begin{pmatrix} M & N\\ N & -M \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $M$ и $N$ — симметричные квадратные матрицы третьего порядка. Это обстоятельство позволит нам доказать теорему о существовании трех и только трех типов полей тяготения.

Покажем, что формула (7) действительно имеет место. Уравнения (1′) относительно репера (5)

$$\sum_{\sigma} e_{\sigma} R_{\alpha\sigma\beta\sigma}=0$$

(где $e_i = -1$, $e_4 = 1$) запишем в собирательных индексах. Тогда получим

$$R_{12}+R_{45}=R_{13}+R_{46}=R_{23}+R_{56}=R_{15}-R_{24}=R_{16}-R_{34}=R_{26}-R_{35}=R_{11}+R_{44}=$$
$$=R_{22}+R_{55}=R_{33}+R_{66}=R_{11}+R_{22}+R_{33}=0. \qquad (8)$$

Тождество (2′) дает

$$R_{14}+R_{25}+R_{36}=0. \qquad (9)$$

Если обозначить

$$R_{ab}=m_{ab}, \qquad R_{a,\, b+3}=n_{ab} \qquad (a,\ b\leqslant 3),$$

то на основании (8) и (9) матрицу $(R_{ab})$ можно представить в виде (7), где $M = (m_{ab})$, $N = (n_{ab})$ $(a,\ b = 1,\ 2,\ 3)$, причем имеют место соотношения

$$\sum_{s=1}^{3} m_{ss}=0, \qquad \sum_{s=1}^{3} n_{ss}=0.$$

Теперь докажем интересующую нас теорему. В соответствии с равенствами (6) и (7), $\lambda$-матрица (4) имеет следующий вид:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=\begin{pmatrix} M+\lambda\varepsilon & N \\ N & -M-\lambda\varepsilon \end{pmatrix}.$$

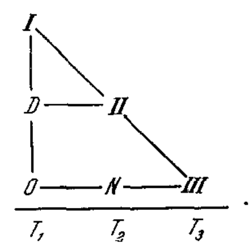
Применяя элементарные преобразования можно привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} M+iN+\lambda\varepsilon & 0 \\ 0 & M-iN+\lambda\varepsilon \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{Q}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Соответствующие элементы трехмерных $\lambda$-матриц $Q(\lambda)$ и $\overline{Q}(\lambda)$ комплексно сопряжены, следовательно, их элементарные делители также сопряжены, а характеристики совпадают. Это означает, что характеристика $\lambda$-матрицы (4) распадается на две повторяющие друг друга части.

Все возможные типы характеристик матрицы $Q(\lambda)$ исчерпываются следующими тремя: 1) [111], 2) [21], 3) [3], что и доказывает теорему.

Будем пространства $T$ снабжать индексом, обозначающим тип этого пространства: $T_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Пространства $T_1$ и $T_2$ можно разделить соответственно на три и два подтипа, учитывая возможность совпадения базисов элементарных делителей. Изобразим пространства $T_i$ вместе с подтипами при помощи так называемой диаграммы Пенроуза:




Здесь I, $D$, $O$ — подтипы пространства $T_1$. Подтип I соответствует случаю, когда все три базиса различны. Если два из трех базисов совпадают, имеет место подтип $D$. Совпадению всех базисов отвечает подтип $O$ (для свободного пространства он включает только плоское пространство-время). «Невырожденный второй тип» II осуществляется в том случае, когда базис кратного элементарного делителя (т. е. имеющего степень выше 1; в данном случае кратность равна 2) отличается от базиса простого элементарного делителя. В противоположном случае имеем «вырожденный второй тип» $N$. Пространство III ($T_3$) имеет единственный элементарный делитель (его кратность равна 3). Для пространств $N$ и III базисы элементарных делителей с необходимостью должны быть равны нулю.

*Изложенный выше* вывод о существовании трех типов полей тяготения мы получили для случая свободного пространства. Имеет ли место аналогичный результат в общем случае, когда уравнения (1), а следовательно, и (1′) не выполняются?

Когда исследуемое пространство не является пространством Эйнштейна, классификация по алгебраическим свойствам тензора кривизны оказывается практически невозможной, поскольку уравнения типа (8) не выполняются и матрица $(R_{ab})$ не может быть приведена к симметрично-сдвоенному виду. Однако в этом случае можно построить новый тензор (его называют тензором Петрова), обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны и удовлетворяющий уравнениям, аналогичным (1). Действительно, пусть уравнения поля имеют вид

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta}, \qquad (10)$$

где $\lambda$ — постоянная, а $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса материи. Сконструируем тензор Петрова:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}-S_{\alpha\beta\gamma\delta}+\sigma(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

где

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{\lambda}{2}(g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma}+g_{\beta\delta}-g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}),$$

а $\sigma$ — скаляр. Легко убедиться, что тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет тождествам (2) и (2′), а $P_{\alpha\beta}$ (в силу (10)) — уравнениям поля $P_{\alpha\beta}=(R+3\sigma)\,g_{\alpha\beta}$.

Таким образом, в смысле алгебраической структуры тензора $P_{\alpha\beta}$ мы автоматически приходим к выводу о существовании трех типов полей тяготения.

Для классификации полей тяготения общего вида удобно использовать тензор конформной кривизны Вейля

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}-g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}+g_{\gamma\delta}R_{\alpha\beta}-g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta})+\frac{1}{6}R\,(g_{\alpha\delta}g_{\gamma\delta}-g_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}).$$

Тензор Вейля удовлетворяет тождествам (2) и (2′) и, кроме того, $C_{\alpha\beta}=0$, т. е. в алгебраическом отношении он ведет себя так же, как тензор кривизны свободного пространства. Ясно, что и в общем случае диаграмма Пенроуза сохранит свой вид.

Физическая интерпретация различных типов гравитационных полей далека от завершения. Подавляющее большинство известных в настоящее время решений уравнений Эйнштейна принадлежит к первому типу классификации. Возможно, это связано с тем, что главным образом решались планетарные задачи, где в качестве условий на бесконечности предполагалось существование метрики плоского пространства Минковского, что свойственно только пространствам первого типа. Характерной чертой пространств $T_2$ и $T_3$ является то, что их тензор кривизны всегда отличен от нуля, т. е. они не могут быть плоскими. Это и другие свойства позволяют считать их полями волновой природы. Впрочем, общепринятого инвариантного критерия гравитационных волн до сих пор нет. В соответствии с различными определениями волновых полей к их числу относят поля того или иного класса. В последнее время все большее число исследователей высказывается в пользу определений, объявляющих гравитационными волнами поля типа $N$ диаграммы Пенроуза.

*Л. П. Грищук*