

RELATIVITÉ. — *Sur la théorie newtonienne de la gravitation.*

Note (\*) de M. ANDRZEJ TRAUTMAN, présentée par M. André Lichnerowicz.

Réduction de la théorie de l'espace-temps de Newton à une théorie géométrique analogue à la relativité générale. Étude des connexions affines et du champ gravitationnel dans cette théorie.

É. Cartan a montré que la gravitation newtonienne peut être réduite à une théorie géométrique analogue à la théorie de la relativité générale (1). C. Kilmister a construit récemment une théorie géométrique de la gravitation du type newtonien qui constitue un modèle simple de la théorie d'Einstein (2). La présente Note contient une formulation géométrique de la théorie de Newton qui est quelque peu différente de la formulation donnée par Cartan. En particulier, nous établissons une relation entre les deux connexions affines qui s'introduisent d'une façon naturelle dans la théorie newtonienne et précisons le caractère géométrique des transformations de Galilée.

1. L'espace-temps de la théorie de Newton est une variété à connexion affine  $X_4$ , homéomorphe à l'espace euclidien à quatre dimensions, douée d'une famille d'hypersurfaces  $T$  et d'un champ de 2-tenseurs symétriques contravariants  $g$ . La variété espace-temps et la structure géométrique dont elle est munie satisfont aux hypothèses de différentiabilité semblables à celles faites en théorie d'Einstein (3). Les hypersurfaces de  $T$  sont des variétés différentiables à trois dimensions; la famille  $T$  définit un feuilletage de  $X_4$ .

Nous allons introduire dans  $X_4$  des coordonnées locales  $x^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) et écrire l'équation des hypersurfaces de la famille  $T$  sous la forme  $t = \tau(x) = \text{Cte}$ . Les composantes, par rapport aux repères naturels, de la connexion, du tenseur de courbure, du tenseur  $g$  et de la dérivée covariante, seront désignées par  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ,  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $g^{\alpha\beta}$  et  $\nabla_\alpha$ , respectivement

Les éléments géométriques de l'espace-temps newtonien satisfont aux postulats suivants :

I. La connexion affine est sans torsion,  $\Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha = 0$ .

II. Elle admet une jauge de volume,

$$R^\mu{}_{\mu\alpha\beta} = 0.$$

III. Il existe trois champs de vecteurs linéairement indépendants  $\xi_i^\alpha$  tels que

$$\xi_i^\alpha t_\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha \xi_i^\beta = 0 \quad (t_\alpha = \partial_\alpha \tau; i = 1, 2, 3).$$

Cette condition peut s'écrire sous la forme équivalente

$$t_{[\alpha} R^{\alpha\beta\gamma\delta]} = 0.$$



IV. Le tenseur de courbure est tel que

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad \text{où } R^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\gamma\mu} R^{\alpha\beta\mu\delta}.$$

V.  $\nabla_{\nu} g^{\alpha\beta} = 0$ .

VI. Le rang de la matrice  $g^{\alpha\beta}$  est égal à *trois* et

$$g^{\alpha\beta} t_{\beta} = 0.$$

A ces hypothèses, il convient d'ajouter une interprétation physique et des équations de mouvement. Nous appellerons ligne d'univers toute courbe (régulière) qui coupe chacune des hypersurfaces  $\tau = \text{Cte}$  en un point. En coordonnées locales, l'équation d'une ligne d'univers peut donc être écrite  $x^{\alpha} = z^{\alpha}(t)$ . Nous supposons que :

VII. Le mouvement des particules libres est tel que leurs lignes d'univers sont des géodésiques par rapport à la connexion  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ .

(Ici l'adjectif *libre* signifie que le mouvement n'est influencé que par la force gravitationnelle.)

VIII. L'équation du champ de gravitation dans le vide est

$$(1) \quad R_{\alpha\beta} = 0.$$

où  $R_{\alpha\beta}$  est le tenseur de Ricci,  $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu}$ .

2. Si  $f(t)$  est une fonction monotone (régulière), la transformation  $t \rightarrow f(t)$  préserve la famille d'hypersurfaces  $T$ . Il suit des hypothèses II, III, V et VI qu'on peut choisir  $f$  de telle façon que

$$(2) \quad \nabla_{\alpha} t_{\beta} = 0.$$

Cette condition détermine  $t$  à des substitutions linéaires près et l'on voit sans peine qu'avec ce choix,  $t$  devient le paramètre affine le long des géodésiques d'univers. Ceci montre que  $t$  est le *temps absolu* de la théorie de Newton. Dorénavant, nous nous limiterons à utiliser le paramétrage de  $T$  qui satisfait à (2).

3. D'après les hypothèses I, II et III, le tenseur de courbure est de la forme

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2t_{\beta} \varphi^{\alpha}{}_{\gamma} t_{\delta},$$

où le tenseur  $\varphi^{\alpha\beta}$  n'est déterminé qu'à des transformations près

$$\varphi^{\alpha\beta} \rightarrow \varphi^{\alpha\beta} + s^{\alpha} t_{\beta},$$

où  $s^{\alpha}$  est arbitraire. On peut choisir  $s^{\alpha}$  de telle façon que

$$(3) \quad \varphi^{\alpha\beta} = \nabla_{\beta} \varphi^{\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi^{\alpha} t_{\alpha} = 0,$$

où  $\varphi^{\alpha}$  est un champ de vecteurs. Le tenseur de courbure est encore invariant par les substitutions

$$(4) \quad \varphi^{\alpha} \rightarrow \varphi^{\alpha} + a^i \zeta_i^{\alpha},$$

où  $a^i = a^i(t)$  sont trois fonctions arbitraires de  $t$ .



Étant donné un champ  $\varphi^\alpha$ , nous pouvons définir une nouvelle connexion  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  par la formule

$$(5) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + \varphi^\alpha t_\beta t_\gamma.$$

Un calcul direct montre qu'elle est intégrable,

$$\hat{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0.$$

Il suit du postulat VII et de la formule (5) que les équations de mouvement s'écrivent

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = -\varphi^\alpha.$$

Le vecteur  $\varphi^\alpha$  représente donc la force gravitationnelle et  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  est la connexion qui définit les systèmes inertiels de référence. D'après (4), ces deux concepts ne sont pas définis uniquement; mais ils le sont si l'on fait des hypothèses appropriées sur le comportement à l'infini spatial de  $\varphi^\alpha$ . Autrement dit, le champ gravitationnel  $\varphi^\alpha$  et la connexion plate  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  ont un caractère *global*. Par contre, la connexion  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  est définie localement: elle peut être déterminée par des expériences sur le mouvement des particules d'épreuve.

4. Le postulat IV assure le caractère irrotationnel du champ de gravitation: on peut trouver un scalaire  $\varphi$  tel que

$$\varphi^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi.$$

L'équation du champ dans le vide (1) devient

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = 0$$

ou

$$(6) \quad g^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta \varphi = 0.$$

si l'on désigne par  $\hat{\nabla}_\alpha$  la dérivation covariante par rapport à  $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ .

5. Les équations (2), (3), (5) et le postulat V entraînent

$$\hat{\nabla}_\alpha t_\beta = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\nabla}_\gamma g^{\alpha\beta} = 0$$

Ceci montre qu'on peut introduire un système de coordonnées **privilegiées** (galiléennes) telles que

$$(7) \quad \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = 0$$

et, en même temps,

$$(8) \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Les transformations de Galilée sont celles qui préservent (7) et (8). Pour qu'une transformation infinitésimale

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + v^\alpha d\lambda$$



soit galiléenne, il faut et il suffit que

$$\mathcal{L} \dot{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L} g^{\alpha\beta} = 0,$$

où  $\mathcal{L}$  désigne la dérivée de Lie.

D'autre part, il existe en théorie de Newton des systèmes de coordonnées qui jouent aussi un rôle privilégié et qui constituent une classe plus vaste que celle des systèmes inertiaux. Ce sont les systèmes cartésiens non inertiaux, utilisant le temps absolu comme une des coordonnées, astreints à la condition (8), mais non à (7). L'expression

$$\dot{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dt} \frac{dx^{\gamma}}{dt}$$

est, dans ce cas, différente de zéro et correspond à ce qu'on appelle la force centrifuge, force de Coriolis, etc.

Dans une théorie riemannienne de l'espace-temps la connexion est fonction du tenseur métrique et chaque transformation qui préserve la métrique laisse aussi invariante la connexion. C'est pour cela qu'en relativité restreinte il n'y a qu'une seule classe de coordonnées et de transformations privilégiées : les coordonnées inertiales et les transformations de Lorentz.

(\*) Séance du 1<sup>er</sup> juillet 1963.

(1) É. CARTAN, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 40, 1923, p. 325 et 41, 1924, p. 1.

(2) C. KILMISTER, *J. Math. Mec.*; 12, p. 1, 1963.

(3) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.