Stanisław L. Bażański, Andrzej Trautman

Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytetu Warszawskiego
Warszawa

Prace Leopolda Infelda na temat równań ruchu

Leopold Infeld's Research on the Problem of Motion

Abstract: The article is a review, intended for non-specialists, of Leopold Infeld's research on the problem of motion in general relativity. It is based on a lecture delivered at the commemorative seminar held in Warsaw on January 19, 1978.

Równania ruchu w ogólnej teorii względności to temat, którego powstanie i rozwój są trwale związane z osobą Leopolda Infelda. Zagadnieniem tym zainteresował się on wkrótce po przybyciu do Instytutu Studiów Zaawansowanych w Princeton w r. 1936, kiedy to rozpoczęła się jego współpraca z Albertem Einsteinem. Jej wynikiem były trzy wspólne publikacje poświęcone problemowi ruchu. Stały się one punktem wyjścia blisko czterdziestu późniejszych prac, napisanych przez Infelda bądź samodzielnie, bądź też wspólnie z kolejnymi współpracownikami. Znaczna część tych prac powstała w Warszawie. Tematyce tej pozostał Infeld wierny do końca życia. Tylko wojna i związane z nią programy badawcze rządu kanadyjskiego skłoniły go do zajęcia się na pewien czas teorią anten i rozchodzenia się fal elektromagnetycznych.

Pierwszą pracą na temat związku równań ruchu z równaniami pola ogólnej teorii względności była opublikowana w r. 1927 praca Einsteina z Grommerem [1]. Praca ta oparta była na rozumowaniu, które zawierało wiele elementów heurystycznych i niezbyt dokładnie, jak na dzisiejsze wymagania, sprecyzowanych. Zawierała jednak bardzo ważne wnioski. Jednym z nich było stwierdzenie, że na mocy równań pola ogólnej teorii względności linia świata osobliwości w polu grawitacyjnym, statycznym lub stacjonarnym, musi być, przynajmniej w najniższym przybliżeniu słabego pola, linią geodezyjną.

Fakt ten przeciwstawia ogólną teorię względności innym teoriom pola — szczególnie zaś elektrodynamice Maxwella-Lorentza, w której równania ruchu są niezależne od równań pola. Aby to dokładniej wyjaśnić przypomnijmy, że w elektrodynamice zachodzi prosty związek pomiędzy dywergencją całkowitego tensora energii — pędu pola i cząstek. Oznaczając

$$T_\alpha^{\ \beta} = \overset{(e)}{T}{}_\alpha^{\ \beta} + \overset{(c)}{T}{}_\alpha^{\ \beta},$$

gdzie

$$\overset{(e)}{T}{}_\alpha^{\ \beta} = -\frac{1}{4\pi}\left(f_{\alpha\varrho} f^{\beta\varrho} - \frac{1}{4}\delta_\alpha^{\ \beta} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}\right)$$

jest tensorem energii-pędu pola elektromagnetycznego $f_{\alpha\beta}$, a

$$\overset{(c)}{T}{}_\alpha^{\ \beta} = \mu u_\alpha u^\beta$$

jest tensorem energii-pędu cząstek, których gęstość masy jest równa μ, a u^α jest polem ich wektora czteroprędkości, mamy

$$T_\alpha^{\ \beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{8\pi}(f_{\alpha\beta;\gamma} + f_{\beta\gamma;\alpha} + f_{\gamma\alpha;\beta}) f^{\beta\gamma} + \frac{1}{4\pi} f_{\alpha\lambda}(f^{\lambda\beta}{}_{;\beta} + 4\pi j^\lambda) + \mu\frac{Du_\alpha}{ds} - f_{\alpha\lambda} j^\lambda, \tag{1}$$

gdzie j^α jest czterowektorem gęstości prądu. Wskaźniki greckie w całym artykule przebiegają wartości 0, 1, 2, 3, a łacińskie 1, 2, 3. Równość ta jest związkiem pomiędzy równaniami Maxwella, równaniami ruchu Lorentza i dywergencją całkowitego tensora energii-pędu:

$$\mathrm{Div}\ T = f \times \text{równania Maxwella} + \text{równania ruchu}. \tag{2}$$

Typowym sposobem jej wykorzystania jest posłużenie się nią do wyprowadzenia zasady zachowania energii i pędu dla układu składającego się z pola i wytwarzających je cząstek. Jeśli pole spełnia równania Maxwella, a cząstki poruszają się zgodnie z równaniami ruchu Lorentza, to z (2) wynika, że lokalnie spełniona jest zasada zachowania energii. Tożsamością (2) można również posłużyć się w celu ukazania mechanizmu wynikania równań ruchu z innych elementów teorii. Jeśli w elektrodynamice klasycznej pole w pewnym obszarze spełnia równania Maxwella, a dywergencja całkowitego tensora energii pola i cząstek znika, to tożsamość (2) zapewnia, iż automatycznie spełnione będą równania ruchu ładunków punktowych. Widać więc, że w elektrodynamice obok równań pola przyjąć trzeba jeszcze jeden niezależny postulat, którym mogą być albo równania ruchu cząstek punktowych albo zasada zachowania.

Inaczej przedstawia się sprawa w ogólnej teorii względności, w której równania pola są postaci,

$$G^{\mu\nu} = -8\pi\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{3}$$

gdzie $G^{\mu\nu}$ jest tensorem Einsteina wyznaczonym przez tensor metryczny czasoprzestrzeni i jego pierwsze oraz drugie pochodne. Dywergencja tensora Einsteina jest tożsamościowo równa zeru, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0$, a stąd na mocy równań Einsteina również $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Znikanie dywergencji całkowitego tensora energii pędu nie jest więc teraz postulatem, lecz wnioskiem wynikającym z teorii grawitacji. Wystarczy zatem przyjąć jeden tylko postulat — równania pola (tzn. równania Einsteina i ewentualnie równania innych pól, jeśli one występują), żeby z tożsamości typu (2) jako wniosek otrzymać równania ruchu cząstek punktowych.

Powstaje pytanie, co jest powodem tak odmiennego statusu problemu ruchu w ogólnej teorii względności? Einstein i Grommer [1] dopatrywali się przyczyny takiego stanu rzeczy w nieliniowości równań pola grawitacyjnego. Podana przez nich motywacja była wielokrotnie powtarzana w rozmaitych kontekstach: Przypuśćmy, że dany jest dowolnie poruszający się elektron E_1, który wytwarza pole f_1 będące rozwiązaniem liniowym równań pola. Niech ponadto dany będzie inny, rozpatrywany oddzielnie i inaczej się poruszający elektron E_2, który wytwarza pole f_2 spełniające te same równania pola. Jeśli oba elektrony będzie się rozpatrywać jednocześnie, to całkowite pole, na mocy liniowości równań pola, będzie równe f_1+f_2 i będzie miało osobliwości wzdłuż tych samych linii świata E_1 i E_2, czyli elektrony wykonywać będą te same ruchy co poprzednio. Stąd Einstein i Grommer wyciągnęli wniosek, że w teorii liniowej ruch jest niezależny od równań pola, a tym samym, jeśli równania ruchu wynikają z równań pola, bądź są przez nie w jakikolwiek inny sposób ograniczone, to odpowiedzialna za to powinna być nieliniowość równań pola. Dziś wiemy, że w przypadku elektrodynamiki rozumowanie to jest w pełni słuszne (z wyjątkiem ostatniego wniosku) i pokazuje raz jeszcze to tylko, że w elektrodynamice równania pola i ruchu są niezależne. Około roku 1960 w Warszawie Infeld wraz z uczniami doszli do wniosku, że rozumowanie to nie jest jednak słuszne uniwersalnie dla każdej liniowej teorii pola * z tego prostego powodu, że jego przesłanki nie mają charakteru uniwersalnego. Nie jest bowiem prawdą, że każda teoria liniowa będzie dopuszczała rozwiązanie reprezentujące jedno nawet dowolnie poruszające się źródło punktowe — „elektron" E_1 — które będzie wytwarzać pole f_1. Na przykład, w tzw. zlinearyzowanej teorii grawitacji dozwolone są tylko rozwiązania reprezentujące pojedyncze źródło punktowe poruszające się ruchem jednostajnym po linii prostej, przy czym to ograniczenie ruchu jest konsekwencją warunków całkowalności jakie muszą być spełnione przez równania pola teorii zlinearyzowanej. Zasada superpozycji dopuszcza oczywiście rozwiązania będące superpozycją rozwiązań wspomnianego typu, ale będą one reprezentowały dwie lub więcej cząstek punktowych poruszających się ruchem jednostajnym po liniach prostych, a więc nie oddziałujących z sobą fizycznie.

Dziś już wiemy, przede wszystkim w wyniku badań prowadzonych przez Infelda i jego uczniów, że powodem wynikania równań ruchu z równań pola ogólnej teorii względności nie jest nieliniowość, lecz ogólna niezmienniczość tej teorii. Z jednej strony leży ona u podstaw tożsamości $G^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$, a z drugiej powoduje, że zmienne dynamiczne $g_{\mu\nu}$ nie są wyznaczone z równań pola jednoznacznie, lecz z dokładnością do czterech dowolnych funkcji, których ustalenie

---

* Niezależnie, w ramach opracowanej przez siebie metody przybliżeń, do tego samego wniosku doszli Havas i Goldberg [4].

jest równoważne wyborowi układu współrzędnych w czasoprzestrzeni. Swoboda ta jest swego rodzaju niezmienniczością cechowania analogiczną do cechowania potencjałów w elektrodynamice. Ta „niezmienniczość cechowania" ogranicza ruch źródeł pola grawitacyjnego, a w niektórych przypadkach pozwala go wyznaczyć dzięki mechanizmowi, który jest analogiczny do związku pomiędzy cechowaniem potencjałów i zasadą zachowania ładunków w elektrodynamice klasycznej.

Zobaczmy, na przykład, jak przedstawia się kwestia równań ruchu w najprostszym przypadku materii pyłowej, opisanej jako ciecz doskonała o gęstości μ i znikającym ciśnieniu. Wtedy $T^{\mu\nu} = \mu u^\mu u^\nu$ i z równań (3) oraz z prawa zachowania masy $(\mu u^a)_{;a} = 0$ otrzymamy $\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = \frac{Du^\mu}{ds} = 0$, czyli linie prądu pyłu muszą być liniami geodezyjnymi.

Powyższy elementarny przykład znany był od bardzo dawna. Einstein uważał jednak, że tensor energii-pędu jest tymczasowym, fenomenologicznym opisem materii. Spodziewał się, że opis ten zostanie zastąpiony przez jednolitą teorię pola, w której będą występowały pola czysto geometryczne mające, między innymi, dostarczyć informacji na temat pól fizycznych, cząstek elementarnych itp. Za bardziej zadowalające, choć też tymczasowe, uważał Einstein podejście, w którym cząstki miały być opisywane przez osobliwości pustej czasoprzestrzeni. Ten punkt widzenia był już przyjmowany w pracy Einsteina i Grommera, a w bardziej konsekwentnej postaci został rozwinięty w pracy Einsteina, Infelda i Hoffmanna z 1938 r. [2]. Punktem wyjścia tych autorów były więc nie równania (3), lecz równanie próżniowe, $G^{\mu\nu} = 0$, w obszarze poza osobliwościami reprezentującymi materię. Ponieważ spełniona jest tożsamość

$$\sqrt{-g}\, G_\mu{}^\nu = 8\pi\varkappa[\sqrt{-g}\, t_\mu{}^\nu + (\sqrt{-g}\, U_\mu{}^{a\nu})_{,a}],$$

w której $t_\mu{}^\nu$ jest einsteinowskim pseudotensorem energii-pędu, będącym biliniową funkcją pierwszych pochodnych cząstkowych tensora metrycznego, a $U_\mu{}^{a\nu}$ są tzw. superpotencjałami, zależącymi liniowo od pierwszych pochodnych tensora metrycznego i antysymetrycznymi we wskaźnikach a i ν, to równania pola można przedstawić w postaci

$$(\sqrt{-g}\, U_\mu{}^{sk})_{,s} + (\sqrt{-g}\, U_\mu{}^{0k})_{,0} + \sqrt{-g}\, t_\mu{}^k = 0\,. \tag{4}$$

Całkując (4) po dwuwymiarowej powierzchni przestrzennej nie przechodzącej przez żadne osobliwości i takiej, że jej wektor normalny n_k, $k = 1, 2, 3$, jest ortogonalny do linii współrzędniowej czasu, otrzymuje się

$$\frac{d}{dt}\oint \sqrt{-g}\, U_\mu{}^{0k} n_k dS + \oint \sqrt{-g}\, t_\mu{}^k n_k dS = 0\,. \tag{5}$$

Jak już mówiliśmy, wielkości pod całką zależą od tensora metrycznego czasoprzestrzeni i jego pierwszych pochodnych cząstkowych. Podstawiając do (5) jakiekolwiek ścisłe rozwiązanie próżniowych równań Einsteina, nie otrzymamy żadnej nowej zależności, gdyż równanie (5) spełnione będzie tożsamościowo. Problem jednak, między innymi, polega na znalezieniu rozwiązań równań pola grawitacyjnego. W pracy [2] sformułowano więc metodę przybliżeń sprowadzającą równania pola (4) w każdym kolejnym jej kroku do równania Laplace'a i rozwiązano te równania z warunkami asymptotycznymi w nieskończoności, które wybierały tylko rozwiązania typu biegunowego i ponadto zapewniały dla dużych odległości odpowiedniość z teorią Newtona. Równania (5) zapisane z dokładnością do n-tego przybliżenia tej metody zawierały tylko znane pola (rzędu mniejszego niż n) i były nietrywialnymi równaniami ruchu dla $\mu = 1, 2, 3$, a dla $\mu = 0$ zasadą zachowania energii.

Sama metoda przybliżeń, nazwana od pierwszych liter nazwisk jej twórców metodą EIH, była wtedy w 1938 r. swego rodzaju innowacją. Jeszcze w roku 1918 Einstein przy dyskusji promieniowania grawitacyjnego wprowadził metodę przybliżeń opartą na założeniu, że pole grawitacyjne jest słabe i tylko nieznacznie różni się od pola tensora metrycznego przestrzeni Minkowskiego. Ta mała poprawka była z założenia proporcjonalna do stałej grawitacyjnej $\varkappa$. Na mocy równań pola spełniała ona równanie d'Alemberta, a ruch, jaki stąd wynikał, był ruchem trywialnym, bez oddziaływań. Jeśli metodę tę sformułuje się tak, aby otrzymywać poprawki wyższych rzędów (a czyniono to mniej lub bardziej konsekwentnie w wielu pracach, przy czym do najbardziej reprezentatywnych należą tu prace [3, 4]), to w następnym kroku otrzyma się ruch po trajektoriach krzywoliniowych, prawie zamkniętych. Żądanie, aby poprawka była mała, ogranicza stosowalność metody do czasów małych w porównaniu z okresem ruchu, co powoduje, że metoda ta jest mało przydatna przy dyskusji efektów sekularnych. Aby temu zaradzić, w metodzie EIH przyjmuje się inne założenia. Podstawowy cel polega na takim sformułowaniu metody, aby w jej najniższym rzędzie otrzymać równanie Newtona zagadnienia n ciał (w naszej dyskusji przyjmujemy $n = 2$)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = (-1)^i \varkappa \frac{m_1 m_2}{r} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; \quad i = 1,2\,. \tag{6}$$

Jak widzimy, przyspieszenie i wyraz liniowy w $\varkappa$ występują tu na równych prawach, powinny więc być jednakowego rzędu. Jeśli ponadto w pierwszym przybliżeniu ma się otrzymać ruch nierelatywistyczny, to ruchy cząstek muszą być powolne, czyli $v \ll c$, i parametrem rozwinięcia powinno być v/c. Dalej, na mocy twierdzenia o wiriale, odniesionego do newtonowskiego przypadku n ciał, v^2 powinno być tego samego rzędu co $\varkappa m/r$, a więc

$$\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{\varkappa m}{c^2 r}. \tag{7}$$

Aby to sformalizować Einstein, Infeld i Hoffmann przyjęli założenie, że wszystkie odległości są wielkościami zerowego rzędu, a prędkości są rzędu pierwszego. Wtedy ich kwadrat będzie rzędu drugiego, a z wniosku (7) twierdzenia o wiriale również masy muszą być rzędu dwa. To z kolei, wobec równań (6), powoduje, że także przyspieszenia są rzędu drugiego, co oznacza, że wszystkie różniczkowania względem czasu podwyższają rząd rozważanej wielkości o jeden. Rozwinięcie względem $1/c$ wyrażenia na potencjał (opóźniony lub przedwczesny) skalarnej teorii promieniowania ze źródłem punktowym o natężeniu $a(t)$ prowadzi do

$$\frac{a\left(t \mp \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{a(t)}{r} \mp \frac{1}{c}\dot{a}(t) + \frac{1}{2c^2} r\ddot{a}(t) + \dots \tag{8}$$

Widzimy, że zgodnie z powyższymi regułami wielkość a występuje tu w rzędzie zero, $\dot{a}$ — w pierwszym itd. (i to rozróżnienie rzędów zachowa się, jeśli nawet przyjmie się jednostki, w których $c = 1$). Z (8) wynika też, że rozwinięcie tzw. potencjału stojącego $(2r)^{-1}[a(t-r/c)+a(t+r/c)]$ będzie zawierać tylko wyrazy rzędu parzystego (równego $2n$, gdzie $n = 0,1,2. \dots$). Potencjał ten jest rozwiązaniem równania d'Alemberta z warunkami granicznymi w nieskończoności wykluczającymi promieniowanie. Przez analogię, w pracy [2] zakładano, ponieważ autorów nie interesowało zagadnienie promieniowania, że rozwinięcie składowych tensora metrycznego zawiera wyrazy tylko rzędu parzystego, w przypadku g_{00} i $g_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$, lub tylko rzędu nieparzystego, w przypadku g_{0m}.

W [2] pokazano, że w najniższym, trzecim rzędzie tak sformułowanej metody przybliżeń równania (5) dla $\mu = 0$ pozwalają wyznaczyć masy jako stałe całkowania, a w rzędzie czwartym, dla $\mu = k$, prowadzą do newtonowskich równań ruchu (6). W piątym rzędzie, dla $\mu = 0$, równania (5) wyznaczają relatywistyczne i grawitacyjne poprawki do mas, a w szóstym rzędzie, dla $\mu = k$, prowadzą do pozanewtonowskich równań ruchu, które są najważniejszym wynikiem praktycznym tej pracy. Równania te opisują ruch układu n ciał o porównywalnych masach, z uwzględnieniem poprawek ogólnorelatywistycznych. Za ich pomocą wyznaczono relatywistyczne orbity gwiazd podwójnych [5].

Metoda EIH pozwala więc w kolejnych swych krokach skonstruować ciąg teorii grawitacji, z ducha newtonowskich, które stanowią jakby pośrednie etapy przy przejściu korespondencyjnym od ogólnej teorii względności do mechaniki newtonowskiej. Jako metoda dokonywania przejścia korespondencyjnego (lub nawet przejść, bo w każdym jej przybliżeniu dokonuje się przejścia do innej teorii), musi po pierwsze, zawierać pewne elementy, które z punktu widzenia ogólnej teorii względności jako modelu matematycznego są arbitralne, ale które można uzasadnić intuicyjnie. Z tego też, po wtóre, powodu, byłoby rzeczą bardzo trudną, przy obecnym stanie wiedzy, w ogóle sformułować, a nie tylko rozwiązać, problem zbieżności tej metody. Można się jedynie zapytać jakie są intuicyjne przesłanki, które pozwalają przypuszczać, że jest ona metodą fizycznie uzasadnioną, co znaczy, że kolejne jej kroki będą w coraz to lepszym stopniu opisywać rzeczywiste ruchy układu obiektów oddziałujących grawitacyjnie, a ponadto jakie są warunki, w których te przesłanki będą zrealizowane. Otóż, na pewno z intuicją zgodne będzie żądanie, aby kolejne poprawki były coraz to mniejsze, czyli żeby parametr rozwinięcia $v/c \ll 1$. Typową prędkością ciała w układzie wykonującym ruch skończony będzie $v = r/T$, gdzie r jest średnim rozmiarem orbity, a T średnim okresem ruchu. Z okresem tym jest związana charakterystyczna długość fali $\lambda = cT$ i wobec tego $v \ll c$ pociąga za sobą $r \ll \lambda$. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia o wiriale, z $v \ll c$ wynika, że $\varkappa m/c^2 v \ll 1$, czyli

$$\varkappa m/c^2 \ll r \ll \lambda\,.$$

Należy się więc spodziewać, że metoda EIH będzie dobrze funkcjonować w przypadku układów, w których odległości pomiędzy ciałami będą małe w porównaniu z charakterystyczną długością fali układu oraz duże w porównaniu z promieniami grawitacyjnymi ciał (równymi $2km/c^2$). To ostatnie zostało potwierdzone ściśle przez rozwiązanie metodą EIH zagadnienia jednego ciała i zbadanie warunków jego zbieżności do ścisłego rozwiązania Schwarzschilda [6].

Postępowanie podane w pracy EIH zostało rozwinięte i udoskonalone w następnych dwóch wspólnych pracach Infelda i Einsteina [7, 8] poświęconych zagadnieniu ruchu. W pierwszej z tych prac został przedyskutowany wpływ transformacji układu współrzędnych, a w drugiej wprowadzono szereg technicznych udoskonaleń i przedstawiono cały problem *ab initio*. W rezultacie praca [8] stanowi ostateczną i pełną pod względem logicznym wersję otrzymywania równań ruchu metodą całek powierzchniowych.

Pomimo iż problem ruchu n ciał ciężkich został rozstrzygnięty w znaczeniu opisywanym powyżej, nie oznaczało to, że tym samym został też rozstrzygnięty analogiczny problem ruchu ciała próbnego w danym polu zewnętrznym. Spowodowane to jest specyfiką metody EIH, która jest dostosowana do opisu powolnych ruchów i słabych pól, podczas gdy ciało próbne jest modelem niezmiernie małego ciała mogącego się poruszać również w bardzo silnych polach. W pierwotnej wersji ogólnej teorii względności przyjmowany był postulat, że ruchy ciał próbnych są opisywane liniami geodezyjnymi w czasoprzestrzeni. Jeśli jednak równania ruchu ciał ciężkich wynikają z równań pola, tym bardziej powinien z nich wynikać postulat o geodezyjnych. Problem ten został podjęty w pracy Infelda i Schilda [9]. Sformułowali oni metodę przybliżeń, w której parametrem była masa ciała i przedyskutowali proces graniczny określony na ciągu coraz to mniejszych cząstek, których masy dążyły do zera i na odpowiadającym im ciągu pól grawitacyjnych dążących w granicy do pola zewnętrznego. Wynikiem ich pracy było stwierdzenie, że postulat geodezyjny jest rzeczywiście konsekwencją równań pola ogólnej teorii względności.

Po powrocie do Warszawy Leopold Infeld kontynuuje swą pracę w dziedzinie równań ruchu. W okresie tym podaje on nowe sformułowanie problemu [10], w którym osobliwości reprezentujące materię były opisywane za pomocą tensora energii pędu zawierającego funkcję δ-Diraca. W sformułowaniu tym była nadal wykorzystywana metoda przybliżeń EIH. Odzwierciedlało ono związek pomiędzy metodą otrzymywania równań ruchu za pomocą całek powierzchniowych z metodami, w którym materia była opisywana rozciągłym tensorem energii pędu.

Nowa metoda Infelda uczyniła technikę otrzymywania równań ruchu bardziej przejrzystą i sprowadzała ją do kilku zaledwie kroków rachunkowych, co było ogromnym postępem w stosunku do prac poprzednich, które podawały w zasadzie tylko wyniki, gdyż obliczenia były zbyt obszerne, aby móc je publikować. W rezultacie, pojawił się teraz problem wyrażeń nieskończonych, podobny do tego jaki występuje w innych teoriach pola, lecz dodatkowo skomplikowany przez nieliniowość teorii. W rachunkach bowiem wystąpiły całki $\int_{-\infty}^{\infty} x^{-p}\delta(x)\,dx$ $(p = 1, 2, \ldots)$ po obszarze zawierającym osobliwość. Jeśli na całki z funkcją δ patrzeć, jak to często czynili wtedy fizycy, jako na granicę całek zawierających „rozmyte" modele funkcji $\delta(x, \varepsilon)$, będące funkcjami dodatnimi, to powyższe wyrażenie będzie rozbieżne. Infeld we wspólnej pracy z Plebańskim [11] zaproponowali, aby całki z funkcją δ w zagadnieniu ruchu rozumieć jako granice całek zawierających pewną wyróżnioną klasę modeli oscylujących $\hat{\delta}(x, \varepsilon)$. Wtedy dla skończonych wartości wykładnika $(p = 1, 2, \ldots, k)$ granice odpowiadające wyrażeniom typu $\int_{-\infty}^{\infty} x^{-p}\delta(x)\,dx$ będą równe zeru. Te wyróżnione modele Infeld i Plebański nazwali „dobrymi" funkcjami δ. Pozwalały one określić procedurę usuwania nieskończoności z równań ruchu przynajmniej w kilku najniższych rzędach metody EIH.

Postępowanie opisujące funkcję δ za pomocą modeli $\hat{\delta}(x, \varepsilon)$ nie jest zadowalające z punktu widzenia analizy matematycznej (występują w nim nieuzasadnione zmiany kolejności wykonywania kilku przejść granicznych) i służyć może jedynie jako argument natury heurystycznej. We współczesnej analizie matematycznej „funkcje" δ są (obok funkcji gładkich w zwykłym sensie) obiektami teorii dystrybucji lub innych teorii jej równoważnych. Powstaje pytanie, czy obserwacja Infelda i Plebańskiego, że istnieją modele dobrych $\hat{\delta}(x)$ nie mogłaby znaleźć swego odpowiednika lub uzasadnienia w teorii dystrybucji czy też innej teorii matematycznej. O ile wiemy, pytanie to pozostało, jak dotychczas, bez odpowiedzi.

Wokół zagadnień podjętych przez Infelda w pracy [10] koncentrowało się wiele tematów innych jego prac, pisanych w tym okresie, jak też prac jego uczniów. Jednym z zagadnień podjętych przez Infelda była kwestia formułowania równań ruchu cząstek przez konstruowanie na podstawie równań pola lagrangianu zawierającego tylko mechaniczne stopnie swobody i prowadzącego bezpośrednio do równań ruchu [12] (lagrangian taki bywa niekiedy nazywany lagrangianem typu Fokkera). W pracy [13] znaleziono kryteria, jakie muszą spełniać rozwiązania równań pola, aby istniał taki lagrangian oraz pokazano, że formułowanie równań ruchu poprzez lagrangian typu Fokkera jest najbardziej ekonomiczną metodą znajdowania postaci równań pozanewtonowskich, gdyż cała nowa informacja potrzebna w tym przybliżeniu jest zawarta w jednej tylko funkcji, którą trzeba wyznaczyć jako poprawkę do jednej ze składowych, mianowicie g_{00}, tensora metrycznego w tym przybliżeniu.

Syntezą prac Infelda i jego szkoły była monografia L. Infelda i J. Plebańskiego [14], którą można uważać za zamknięcie pewnego etapu w badaniach Infelda nad, jak możemy to dziś nazwać, mechaniką typu Einsteina-Infelda.

W okresie tym Leopold Infeld był nastawiony sceptycznie do kwestii czy promieniowanie grawitacyjne prowadzi do efektów niezależnych od układów współrzędnych. Problemem tym interesował się jeszcze w czasach kanadyjskich. Od dawna było rzeczą wiadomą, o czym już wspomnieliśmy, że promieniowanie jest w metodzie EIH opisywane przez wyrazy rzędu nieparzystego w przypadku składowych g_{00} i g_{kl} oraz parzystego dla składowej g_{0m}. Jeszcze w 1938 r. w [15], oraz w kilku późniejszych pracach, Infeld pokazał, że wyrazy te nie będą miały wpływu na równania ruchu do ósmego rzędu włącznie (równania pozanewtonowskie pojawiają się w szóstym rzędzie) i wielokrotnie wypowiadał hipotezę, że za pomocą odpowiedniej transformacji układu współrzędnych prawdopodobnie można będzie usunąć wyrazy związane z promieniowaniem w wyższych rzędach. Nietrudno pojąć fizyczną przyczynę niewystępowania w najniższych rzędach wyrazów promienistych, jeśli się przypomni, że w elektrodynamice, na skutek zasady zachowania ładunku, nie może występować promieniowanie biegunowe (monopolowe), lecz tylko promieniowanie związane z multipolami wyższych rzędów. W teorii grawitacji, na skutek zasad zachowania energii i pędu, zabronione jest również promieniowanie dipolowe, a możliwe jest dopiero promieniowanie kwadrupolowe lub wyższe, które jako odpowiednio słabsze będzie miało wpływ na wyższe rzędy metody przybliżeń. Problem promieniowania grawitacyjnego był dodatkowo jeszcze utrudniony przez nielokalizowalność energii i pędu pola grawitacyjnego. Trudności te powodowały, że różni autorzy otrzymywali rozmaite wyrażenia na siłę tarcia promienistego, a nawet nie było jednomyślności czy cząstki są na skutek promieniowania spowalniane, czy też przyspieszane.

Ostatnie dwa lata życia Infeld poświęcił sprawie wyjaśnienia roli promieniowania grawitacyjnego w układach cząstek. We wspólnej pracy z R. Michalską-Trautman [16] uogólnił warunki istnienia zasad typu Fokkerowskiego pokazując, że w pewnych sytuacjach niespełnienie tych warunków oznacza utratę energii przez układ cząstek i prowadzi do siły tarcia promienistego, która powoduje spowalnianie ich ruchu. Wynik ten zaprzeczał więc hipotezie głoszonej przez Infelda poprzednio. Nękany długotrwałą chorobą, na kilka zaledwie tygodni przed swą śmiercią, dochodzi Infeld, przy współpracy R. Michalskiej-Trautman, do dalszych ciekawych wyników wykazując, że całkowita energia wypromieniowana przez układ cząstek i zmierzona w nieskończoności jest równa stracie energii układu spowodowanej przez siłę tarcia promienistego. Wyniki te zostały spisane i opublikowane już po jego śmierci [17, 18].

Jednym z ulubionych powiedzeń Infelda było stwierdzenie, że nikt jeszcze nikogo nie przekonał za pomocą samej jedynie dyskusji, że każdą zmianę poglądów każdy musi wypracować sam dla siebie, na swój własny sposób, a nie należy mu w tym przeszkadzać. I właśnie ostatni okres jego życia był wspaniałą praktyczną ilustracją tej jego zasady. Swym heroicznym poszukiwaniem prawdy udowodnił, iż na przekór schorowanemu organizmowi, umysł jego pozostał elastyczny i młody. I taki jego obraz zachował się w pamięci uczniów.

Literatura *

[1] A. Einstein, J. Grommer, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math.*, Kl. 2 (1927).
[2] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).
[3] B. Bertotti, J. Plebański, *Ann. Phys.* **11**, 169 (1960).
[4] P. Havas, J. N. Goldberg, *Phys. Rev.* **128**, 398 (1962).
[5] H. P. Robertson, *Ann. Math.* **39**, 101 (1938).
[6] A. Trautman, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III **4**, 443 (1956).
[7] A. Einstein, L. Infeld, *Ann. Math.* **41**, 455 (1940).
[8] A. Einstein, L. Infeld, *Canad. J. Math.* **1**, 209 (1949).
[9] L. Infeld, A. Schild, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 408 (1949).
[10] L. Infeld, *Acta Phys. Pol.* **13**, 187 (1954).
[11] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III **4**, 687 (1956).
[12] L. Infeld, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 398 (1957).
[13] J. Plebański, S. Bażański, *Acta Phys. Pol.* **18**, 307 (1959).
[14] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press, London and PWN, Warszawa 1960.
[15] L. Infeld, *Phys. Rev.* **53**, 836 (1938).
[16] L. Infeld, R. Michalska-Trautman, *Ann. Phys.* **40**, 374 (1966).
[17] L. Infeld, R. Michalska-Trautman, *Ann. Phys.* **55**, 576 (1969).
[18] L. Infeld, R. Michalska-Trautman, *Ann. Phys.* **55**, 561 (1969).

* Podajemy tu tylko spis prac cytowanych w tekście. Pełny wykaz prac Leopolda Infelda znaleźć można w książce wydanej niedawno przez PWN w cyklu Polish Men of Science (patrz przypis Redakcji na wstępie artykułu J. Werlego).