Konstanty Radziszewski, *Wstęp do współczesnej geometrii różniczkowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973, str. 318, cena zł 45.—

Pisząc tę recenzję wyszedłem z założenia, że opinia o nowej książce naukowej powinna zawierać informację o jej treści, o stosunku do poprzednich dzieł z tej samej dziedziny i o celach, jakie sobie postawił Autor książki, a także próbę oceny w jakim stopniu i w jaki sposób cele te zostały osiągnięte.

Książka składa się ze wstępu, siedmiu rozdziałów, bibliografii zawierającej 25 pozycji, skorowidza i spisu rzeczy.

We wstępie Autor stwierdza, że celem książki, zaadresowanej do słuchaczy II i III roku studiów matematycznych, jest „zapoznanie czytelnika z podstawowymi pojęciami i metodami współczesnej geometrii różniczkowej". Opierając się na swoim doświadczeniu dydaktycznym, Autor pragnie wprowadzać pojęcia współczesne za pomocą modeli poglądowych, na tle wykładu klasycznej geometrii różniczkowej krzywych i powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Zastrzega się, że nie może podać wszystkich współczesnych pojęć i metod, ale obiecuje taki ich zestaw, który ułatwi przyswajanie szczegółowych zagadnień geometrii różniczkowej. Biorąc pod uwagę że początkujący mają trudności z pojęciem formy różniczkowej, Autor zamierza konsekwentnie odróżniać wartości formy od niej samej, a także dla oznaczania różniczki używać „czasem innych oznaczeń zamiast symbolu d, co powinno podkreślić fakt, że jest to forma liniowa" (str. 6).

Rozdział I jest poświęcony przypomnieniu niektórych definicji i twierdzeń z algebry, analizy i topologii. Autor stara się odróżniać, także w oznaczeniach, przestrzenie (zbiory ze strukturą) od zbiorów, będących nośnikami struktury przestrzeni. Osobiście uważam, że w podręczniku geometrii różniczkowej taka pedanteria jest zbędna, chyba że np. trzeba równocześnie rozpatrywać różne topologie określone w tym samym zbiorze. Mam wrażenie, że tak samo sądzi większość matematyków; np. Kuratowski pisze: „Przez przestrzeń topologiczną rozumiemy zbiór X, ..." [5]. Podobne *abus de language* stale stosuje Bourbaki. Natomiast według Radziszewskiego, „Zbiór $\tilde{V}$ nazywamy *przestrzenią topologiczną* i oznaczamy za pomocą symbolu V, ..." (str 11). Takie sformułowanie można doprowadzić do pewnego zamętu, gdyż większość czytelników będzie skłonna zastąpić zwrot „nazywamy i oznaczamy za pomocą" przez znak równości. Zresztą, na następnej stronie, mówiąc o topologii indukowanej, Autor nie odróżnia już przestrzeni od jej nośnika. Autor definiuje rozmaitość topologiczną, ale nie wspomina o twierdzeniu Brouwera, którego znajomość jest potrzebna do tego, aby zasadnie mówić o wymiarze rozmaitości.

Przestrzenie wektorowe zdefiniowane są za pomocą zwykłej aksjomatyki, a tensory — jako odwzorowania wieloliniowe. Kolejny paragraf zawiera określenia: grupy, pierścienia, ciała, algebry, grupy topologicznej i niezmiennika. Grupa liniowa i grupa afiniczna zostały przez Autora zdefiniowane na przykładzie przestrzeni wektorowej trójwymiarowej. Następny paragraf zawiera wykład elementów geometrii afinicznej w trzech wymiarach. Autor wypowiada tu opinię, iż „Z faktu, że przekształcenie afiniczne jest homeomorfizmem wynika twierdzenie: *równoległość płaszczyzn jest pojęciem geometrii afinicznej*" (str 47). Przy końcu paragrafu o przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej Autor nawiązuje do definicji geometrii podanej przez F. Kleina. Ostatni paragraf pierwszego rozdziału jest poświęcony analizie wektorowej w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Rozdział II jest zatytułowany: Krzywe w przestrzeni euklidesowej E_3. Rozpoczyna się on od definicji relacji równoważności. Autor określa krzywą jako jednowymiarową rozmaitość topologiczną, będącą podprzestrzenią E_3. Definiuje krzywe regularne, styczną do krzywej, długość łuku i repery związane z krzywą. Dalsze paragrafy poświęcone są klasycznym tematem takim, jak krzywizna i skręcenie krzywej, płaszczyzna ściśle styczna, ewolwenta i ewoluta.

W trzecim rozdziale, zatytułowanym „Powierzchnie w przestrzeni euklidesowej E_3" Autor definiuje powierzchnie, przestrzeń styczną, orientowalność powierzchni, podstawowe formy kwadratowe oraz przedstawia inne ważne pojęcia i twierdzenia geometrii powierzchni. Zgodnie z przyjętym sposobem wykładu, Autor wprowadza przy okazji teorii powierzchni wiele pojęć ogólnych: pojęcie modułu pól wektorowych, koneksji w sensie Levi-Civita, różniczkowania kowariantnego i geodezyjnej.

We wstępie do rozdziału IV Autor zapowiada, iż zajmie się „definicją zbioru, zwanego rozmaitością różniczkowalną", dając tym samym wyraz rezygnacji z zamiaru odróżniania przestrzeni od jej podstawowego zbioru. Oprócz określenia rozmaitości, dyfeomorfizmu, zanurzenia i włożenia rozmaitości, Autor zamieszcza tu paragraf na temat żetów odwzorowań jednej rozmaitości w drugą i używa tego pojęcia do zdefiniowania wektorów i kowektorów stycznych do rozmaitości. Paragraf 3 zawiera próbę definicji pochodnej kowariantnej i koneksji liniowej oraz wiadomości na temat całkowalnych układów pól wektorowych. W dalszych częściach rozdziału Autor wykłada elementy geometrii różniczkowej przestrzeni z koneksją liniową. Siedem stron poświęca przestrzeniom Riemanna. Na końcu stwierdza, że „czasoprzestrzeń Minkowskiego ... służy jako przestrzeń geometryczna małej teorii względności".

Rozdział V dotyczy zewnętrznych form różniczkowych, zdefiniowanych jako kowariantne tensory antysymetryczne. Oprócz podstawowych definicji oraz interpretacji geometrycznej prostych p-wektorów, znajduje się tu dowód dwóch lematów na temat postaci pewnych 2-form, twierdzenie o rozkładzie jedności (bez dowodu) oraz elementy całkowania form po łańcuchach, zakończone twierdzeniem Stokesa. Na dwóch stronach znajduje się kilka definicji oraz informacji na temat grup homologii i kohomologii de Rhama, a obszerniejsze paragrafy poświęcone są pochodnej Liego oraz układom Pfaffa.

„Metoda ruchomego reperu" to tytuł szóstego rozdziału książki. W pierwszym paragrafie Autor definiuje grupę Liego i przestrzeń jednorodną. Następnie wprowadza własności przekształceń infinitezimalnych, tzn. pól wektorowych indukowanych przez działanie grup, a także podaje równania struktury dla grup i przestrzeni jednorodnych. Obszerny paragraf dotyczy samej metody reperu ruchomego. Jest on ilustrowany przykładem powierzchni w E_3.

Rozdział VII pt. „Wiązki włókniste" zawiera uzupełnienie wiad mości o grupach Liego podanych w poprzednim rozdziale. Przyjęta przez Autora definicja wiązki włóknistej jest podobna do tej, jaką można znaleźć w książce Steenroda. Główna część rozdziału poświęcona jest pojęciu i opisowi koneksji w wiązce głównej w ujęciu zbliżonym do wykładu Lichnerowicza. Książkę kończy krótka informacja o grupach holonomii.

Książka K. Radziszewskiego stanowi próbę wypełnienia luki w polskiej literaturze matematycznej, jaką jest brak podręcznika geometrii różniczkowej, przygotowującego studentów do śledzenia obecnego rozwoju tej dziedziny i do pracy własnej. Elementarna geometria różniczkowa krzywych i powierzchni została obszernie i pięknie wyłożona w dwutomowym dziele Mieczysława Biernackiego [2]. Książka Stanisława Gołąba [4] zawiera klasyczne ujęcie rachunku tensorowego w stylu zbliżonym do monografii J. A. Schoutena [6]. Dzieło Władysława Ślebodzińskiego [8] nawiązuje do idei E. Cartana, ale jeszcze nie w tej formie, jaką tym ideom nadały współczesne szkoły geometrii różniczkowej, głównie francuska i amerykańska. Oryginalny i na wysokim poziomie ścisłości *Wstęp* Romana Sikorskiego [7] jest nieodzowny dla tych, którzy interesują się podstawami geometrii różniczkowej, ale trudno go polecić osobom pragnącym się przygotować do czytania prac w *Journal od Differential Geometry*. Książka L. Auslandera i R. E. Mackenziego [1] stanowi chyba najlepsze osiągalne po polsku, wprowadzenie do teorii rozmaitości różniczkowych[1].

W porównaniu do tej ostatniej, książka K. Radziszewskiego jest — w założeniu — przystępniejsza, zawiera spory fragment elementarnej geometrii różniczkowej, informacje o pojęciu żetu i metodzie reperu ruchomego. Ponadto, Autor podejmuje po raz pierwszy w polskim podręczniku ważną tematykę koneksji w wiązkach głównych i za to należy mu się odpowiednie uznanie. Oczywiście, można zastanawiać się czy dobór materiału omawianego podręcznika jest trafny i nietrudno sformułować uwagi krytyczne. Na przykład, moim zdaniem, Autor nie dość miejsca poświęca zagadnieniom globalnym geometrii różniczkowej. Brak jest w książce wzmianki o klasycznych wynikach Bochnera na temat topologii przestrzeni Riemanna, o własnościach zupełności lub o po-

(1) Proponuję mówić i pisać „rozmaitość różniczkowa" zamiast „różniczkowalna". Własność różniczkowalności dotyczy funkcji i odwzarowań, natomiast truktury, przestrzenie i rozmaitości mogą być różniczkowe. Bywają formy różniczkowe, które nie ą różniczkowalne. Podobne rozróżnienie stosują Sikorski i Dieudonné [3].

lach wektorowych na sferach. Autor formułuje twierdzenie o rozkładzie jedności, ale nie wykorzystuje go do wykazania istnienia struktury riemannowskiej (wzmianka na ten temat znajduje się dopiero na str. 292, w paragrafie o koneksjach w wiązkach głównych). Nie ma w książce nic o strukturach zespolonych, ani o globalnej teorii geodezyjnych.

Zamiast dłużej krytykować podręcznik K. Radziszewskiego za to, czego w nim nie ma — jest to działalność łatwa w stosunku do niemal każdej książki — spróbuję ocenić, w jaki sposób ujęty jest zawarty w niej materiał i czy można z niej nauczyć się tego, co Autor zapowiada we Wstępie. Sądzę, że jest to możliwe tylko przy dużej cierpliwości i znacznym krytycyzmie ze strony czytelnika, gdyż książka zawiera liczne nieścisłości i miejsca niejasne. Niektóre proste rozumowania są przedstawione w sposób rozwlekły, natomiast trudniejsze dowody — pomijane. Wiele przykładów (np. oznaczone numerami od 6 do 10 w rozdziale I) trąci balnalnością; brak jest natomiast ciekawszych przykładów (w skorowidzu nie znalazłem terminów: torus i butelka Kleina). Pomijając liczne, drobne nieścisłości i przejęzyczenia w rodzaju „liczba zbiorów" (str. 12) zamiast „rodzina zbiorów", lub „dzielenie jedynki" (str. 227), przedstawię kilka usterek w książce K. Radziszewskiego, które każą wątpić o jej użyteczności dla początkujących matematyków, a mnie powstrzymują od polecania jej współpracownikom.

1. Wbrew zapowiedzi we wstępie, Autorowi nie udało się w jasny sposób przedstawić pojęcia różniczki. Na str. 54 definiuje on różniczkę funkcji $f\colon R^p \to W$, gdzie W jest przestrzenią wektorową. Rozwinięcie tego pojęcia na następnej stronie jest wyjątkowo nieczytelne, nawet po uwzględnieniu licznych błędów drukarskich. Różniczka funkcji $f\colon V \to R$ określonej na rozmaitości została zdefiniowana przez Autora na str. 181 za pomocą pojęcia żetu. Brak jest wyjaśnienia związku między tymi różnymi określeniami.

2. Na str. 87 Autor stwierdza, iż „odwzorowanie $u^{i'} = u^{i'}(u^1, u^2)$ jest homeomorfizmem obszaru ... na obszar ..., więc jakobian det $\|\partial u^{i'}/\partial u^i\| \neq 0$. Dokładniejsza analiza założeń poprzedzających to zdanie wykazuje, że odwzorowanie, o którym mowa, jest dyfeomorfizmem, a więc konkluzja na temat jakobianu jest słuszna. Sądzę jednak, że początkujący czytelnik może odnieść wrażenie, iż własność ta przysługuje wszystkim różniczkowalnym homeomorfizmom. Szkoda, że Autor nie ostrzegł czytelnika i nie podał przykładu odwzorowania $f\colon R \to R$, $f(x) = x^3$, będącego gładkim homeomorfizmem, chociaż $f'(0) = 0$.

3. Określenie operatora różniczkowania kowariantnego nie jest poprawne, gdyż, według wstępnych informacji w § 3 rozdz. IV, wartość pola $D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ w punkcie x rozmaitości wynosi $D_x(v_x, w_x)$, a więc jest wyznaczana przez same wartości pól $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ w tym punkcie (por. także wiersze 18 i 19 na str. 186). Z drugiej strony wiadomo, że wartość pochodnej kowariantnej pola $\boldsymbol{w}$ w kierunku $\boldsymbol{v}$ w punkcie x zależy w istotny sposób od 1-żetu pola $\boldsymbol{w}$ w tym punkcie.

4. Poważny błąd Autor popełnia w związku ze stosowaniem odwzorowania stycznego f_* (indukowanego w terminologii Autora) do przenoszenia pól wektorowych. Wbrew temu, co twierdzi on na str. 201, mając odwzorowanie różniczkowalne $f\colon V \to W$ oraz gładkie pole wektorowe $\boldsymbol{v}$ na V, na ogół nie można określić pola na W, będącego przeniesieniem $\boldsymbol{v}$ za pomocą f_*. Zwraca na to uwagę wielu autorów podręczników geometrii różniczkowej, a wśród nich S. Sternberg [9] wymieniony przez K. Radziszewskiego w bibliografii.

5. Książka jest niezbyt starannie zorganizowana pod względem układu materiału. Rozdział I jest poświęcony pojęciom podstawowym, w tym ustaleniu oznaczeń i terminologii teorii zbiorów, ale określenie relacji równoważności znajduje się we wstępie do rozdziału II. Nawiasem mówiąc, definicja relacji $y \sim z$ na str. 56 nie jest poprawna. Na str. 67 stwierdza się, że pewne funkcje są formami liniowymi, ale określenie pojęcia formy liniowej jest dopiero na str. 183. Pojęcie pochodnej Liego zostało zdefiniowane w rozdziale o formach zewnętrznych, mimo że stosuje się ono także do innych obiektów geometrycznych. Wiadomości o grupach Liego znajdują się częściowo w rozdziale VI, a częściowo w VII. Autor wprowadza pojęcie algebry Liego grupy Liego dopiero w ostatnim rozdziale, mimo że pojęcie to ułatwiłoby opis przekształceń infinitezimalnych występujących w rozdziale VI.

Jako fizyka, uderzył mnie stosunek Autora książki do nauk doświadczalnych. Na str. 19, po ustępie komentującym istnienie izomorfizmu między dowolną n-wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową a przestrzenią liczbową $\boldsymbol{R}^n$, Autor pisze: „Inaczej być nie może, bo matematyka ma do dyspozycji tylko liczby i funkcje liczbowe i jej zadaniem jest budowanie za ich pośrednictwem modeli równoważnych określonym przestrzeniom lub procesom. Zamiast badać dane zjawisko, co zwykle czyni się za pośrednictwem długich i kosztownych eksperymentów, możemy badać jego model liczbowy środkami matematycznymi i wynik otrzymamy ten sam". Wynikałoby z tego, że należy zaniechać badań eksperymentalnych.

Odbiegając od zasadniczego tematu nieniejszej recenzji, pragnę zaproponować Redakcji Matematycznej Państwowego Wydawnictwa Naukowego, aby podręczniki pisane przez autorów nie mających większego doświadczenia w tym zakresie, ukazywały się najpierw w postaci skryptów i były poddawane ocenie specjalistów, m. in. na łamach Wiadomości Matematycznych. Uwagi recenzentów powinny być uwzględniane przy przekształcaniu lepszych skryptów w książki. Odnośnie do recenzowanej książki mam dodatkowy, drobny żal do Redakcji: nie należało godzić się na pisownię nazwiska Hausdorff przez jedno f.

Zastanawiając się nad tym, w jaki sposób można zaradzić brakom naszej literatury matematycznej w dziedzinie nowoczesnej analizy i geometrii różniczkowej, doszedłem do wniosku, że celowe byłoby wydanie w języku polskim wielotomowego dzieła J. Dieudonnégo pt. *Éléments d'analyse* [3].

Literatura

[1] L. Auslander i R. E. Mac Kenzie, *Rozmaitości różniczkowalne*, Tłum. z ang., PWN, Warszawa 1969.

[2] M. Biernacki, *Geometria różniczkowa*, część I i II, Biblioteka Matematyczna, PWN, Warszawa 1954 i 1955.

[3] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tom 1–4 (dalsze tomy w przygotowaniu), Cahiers scientifiques, Gauthier–Villars, Paris 1969–1971.

[4] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Biblioteka Matematyczna, PWN. Warszawa 1956.

[5] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Biblioteka Matematyczna, wyd. V, PWN, Warszawa 1972.

[6] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Springer–Verlag, Berlin 1954.

[7] R. Sikorski, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Biblioteka Matematyczna, PWN, Warszawa 1972.

[8] W. Ślebodziński, *Exterior forms and their applications*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa 1970.

[9] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

Andrzej Trautman