

Andrzej Trautman

Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytetu Warszawskiego
Warszawa

Teoria względności *

Niniejszy artykuł zawiera przystępne omówienie niektórych zagadnień ogólnej teorii względności. Nie zakłada on u Czytelnika znajomości geometrii Riemanna ani nie zawiera wykładu tej dziedziny matematyki, leżącej u podstaw relatywistycznej teorii grawitacji. Nie można tu również znaleźć elementarnych wiadomości o teorii Einsteina, które obecnie wchodzi w skład wykształcenia każdego fizyka (grawitacja a krzywizna; materia zakrzywia przestrzeń; trzy efekty ogólnej teorii względności). Pierwsza część artykułu poświęcona jest omówieniu pewnych zagadnień dotyczących podstaw teorii względności i jej stosunku do innych teorii fizycznych. W drugiej części znajduje się krótki przegląd tych dziedzin zjawisk fizycznych, w których odgrywają istotną rolę siły grawitacyjne i do których można i warto zastosować równania ogólnej teorii względności.

I

Przez jakiś czas po swoim powstaniu szczególna teoria względności spotykała się z oporem laików, a także pewnych fizyków, którzy chętnie witali zmierzch eteru, ale nie chcieli zrezygnować z absolutności czasu. Jeśli ogólna teoria względności nie wywołała tylu sprzeciwów, to zapewne dlatego, że mało osób mogło zrozumieć, o co w niej chodzi. Obecnie nikt nie próbuje podważać takich rzeczy jak względność równoczesności, przekształcenia Lorentza czy równania Einsteina. Ciągłe jeszcze jednak zdarzają się spory o istotę ogólnej teorii względności, jej zupełność i interpretację fizyczną oraz powiązanie z innymi częściami fizyki. Szczególnie dużo nieporozumień wywołuje rola zasady równoważności, istota ogólnej niezmienniczości i problem wyróżnionych układów odniesienia.

* Referat ogłoszony na XIX Zjeździe Fizyków Polskich w Krakowie, we wrześniu 1965.

Znaczenie zasady równoważności

Einstein przywiązywał wielkie znaczenie do zasady równoważności, porównywał ją do zasady względności i kładł u podstaw swojej teorii grawitacji [1]. Stanowisko to bywa czasem atakowane [2]. Wiąże się to z niezbyt precyzyjnym, a czasem zbyt mocnym formułowaniem zasady równoważności przez Einsteina. Ażeby wyjaśnić istotę rzeczy, wystarczy ograniczyć się do mechaniki i teorii grawitacji Newtona.

U podstaw każdej teorii fizycznej leżą pewne założenia na temat struktury czasu i przestrzeni. W fizyce newtonowskiej większość tych założeń uważana była za tak oczywiste, że rzadko je wyraźnie wysławiano. Jeśli to jednak uczynić, okazuje się, że geometria czasoprzestrzeni Newtona jest nieco bardziej skomplikowana niż geometria szczególnej teorii względności. W teorii Newtona mamy trzy, powiązane ze sobą, zasadnicze struktury:

czas absolutny,
metrykę przestrzeni i
koneksję.

Natomiast w teorii względności zarówno szczególnej, jak i ogólnej, istnieje tylko jedna podstawowa wielkość: metryka czasoprzestrzeni. Dwa pierwsze z powyższych elementów teorii Newtona nie wymagają wyjaśnienia. Mówiąc ogólnie i niezbyt ściśle, koneksja ustala powiązanie wektorów w sąsiednich punktach czasoprzestrzeni, pozwala przenosić równolegle wektory wzdłuż krzywych. Przy jej pomocy określa się linie geodezyjne („proste“): są to linie, których wektory styczne przy przenoszeniu równoległym wzdłuż tych linii pozostają do nich styczne. Koneksja jest wyznaczona przez ruchy swobodne, których trajektorie (wykresy) czasoprzestrzenne są geodetykami względem tej koneksji. Pierwsze prawo dynamiki Newtona, w przypadku braku sił grawitacyjnych mówi, że koneksja czasoprzestrzeni jest całkowalna (płaska), a czas absolutny t jest parametrem afinicznym wzdłuż geodetyk. Jest to dokładnie równoważne stwierdzeniu, że istnieją układy współrzędnych, względem których równania ruchów swobodnych są postaci:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

Jak wiadomo, wyróżnione w ten sposób współrzędne (układy odniesienia) nazywają się inercjalnymi. Dowolne dwa układy inercjalne powiązane są ze sobą za pomocą przekształcenia Galileusza:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}t + \vec{r}_0. \quad (2)$$

Wszystkie przekształcenia zachowujące związek (1) tworzą 10-parametrową grupę Liego.

Zupełnie inaczej sytuacja przedstawia się, gdy nie można zaniedbać pola grawitacyjnego. Szczególną cechą sił grawitacyjnych jest ich uniwersalność;

podlegają im wszystkie ciała. Co więcej, wszystkie ciała doznają tych samych przyspieszeń w danym polu grawitacyjnym (równość masy bezwładnej i ważkiej). Wynika stąd, że w polach grawitacyjnych nie można realizować ruchów swobodnych. Jest to niemożliwość zasadnicza, podobna nieco swym charakterem do zasady nieoznaczoności. Najbardziej „swobodne” są w polu grawitacyjnym spadki swobodne, tzn. ruchy odbywające się pod wpływem jedynie siły ciężkości, przy wyeliminowanych wszystkich pozostałych oddziaływaniach. Według teorii newtonowskiej, trajektorie spadków swobodnych są geodetykami koneksji w czasoprzestrzeni, a raczej trajektorie te definiują pewną koneksję, która jest niecałkowalna (krzywa), chyba że znika pole grawitacyjne. Przez odpowiedni wybór współrzędnych można uprościć kształt współczynników koneksji, a tym samym równania ruchu spadków swobodnych, które przybierają postać

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \text{grad} \varphi, \quad (3)$$

gdzie φ jest potencjałem grawitacyjnym. Jak widać z powyższej analizy, koneksja czasoprzestrzeni jest określona za pomocą doświadczeń mechanicznych. Można się zastanawiać, czy za pomocą innych, niemechanicznych doświadczeń nie można wprowadzić innej koneksji, w szczególności koneksji całkowalnej w przypadku, gdy istnieje pole grawitacyjne. Zasada równoważności (sformułowana przez Einsteina w odniesieniu do ogólnej teorii względności) orzeka, że jest to niemożliwe, jeśli ograniczyć się do doświadczeń lokalnych. Przy tego rodzaju sformułowaniu zasady równoważności widać jej podobieństwo do einsteinowskiego postulatu względności. Ten ostatni orzeka, że za pomocą doświadczeń lokalnych nie można wyróżnić żadnego układu inercjalnego. Wspólną cechą obu postulatów jest to, że oba rozszerzają na (lokalne) doświadczenia niemechaniczne wyniki obserwacji zjawisk mechanicznych i grawitacyjnych.

Żądanie, aby równanie ruchu było postaci (3), wyznacza układ odniesienia znacznie mniej dokładnie niż warunek poprzedni, który się nakłada, gdy nie ma pola grawitacyjnego (tzn. gdy $\partial^2 \varphi / \partial x_k \partial x_l = 0$). Oprócz przesunięć i zwykłych obrotów przestrzennych, można dokonywać zmian układu postaci:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \vec{r} \cdot \ddot{\vec{a}}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $\vec{a}(t)$ oznacza dowolny wektor zależny od czasu. Transformacje (4) stanowią istotne rozszerzenie grupy przekształceń Galileusza. W większości wypadków rozważamy izolowane układy materialne. Wówczas potencjał φ i układ odniesienia można wybrać tak, aby było $\lim \varphi = 0$ dla $r \rightarrow \infty$. Przekształcenia (4) zachowują ten warunek brzegowy, jeśli $\ddot{\vec{a}} = 0$ i w ten sposób odzyskujemy grupę Galileusza. Inaczej mówiąc, w przypadku układu izolowanego, można określić współrzędne inercjalne za pomocą doświadczeń wykonywanych z dala od ciał wytwarzających pole grawitacyjne. W ogólnym

wypadku (np. w kosmologii) uczynić tego nie można, należy zrezygnować z wyróżnionej roli układów inercjalnych i przekształceń Galileusza. Widać stąd, że w newtonowskiej teorii grawitacji obowiązuje swojego rodzaju „zasada ogólnej niezmienniczości”: wszystkie układy odniesienia, w których równania ruchu spadków swobodnych są postaci (3), są równouprawnione. Zasada ta jest konsekwencją zasady równoważności, a nie nowym postulatem.

Względność i symetrie

Sporo nieporozumień wywołuje kwestia, co należy rozumieć przez zasadę względności oraz czy, i w jakim sensie, relatywistyczna teoria grawitacji zawiera więcej „względności” niż teoria szczególna. Np. według Focka powinno się mówić o teorii grawitacji, która uogólnia teorię względności, ale nie jest żadną teorią ogólną względności, bo zawiera mniej symetrii niż teoria szczególna, a przecież to symetrie czasoprzestrzeni decydują o względnym charakterze pojęcia równoczesności, spoczynku itd.

Punktem wyjścia do wyjaśnienia sytuacji w tej dziedzinie może być następująca uwaga: wielkości występujące w każdej teorii fizycznej, względnie przy opisie pewnego układu, można podzielić na absolutne (zewnętrzne) i dynamiczne (podlegające równaniom ruchu). Grupa symetrii teorii, względnie układu, to grupa przekształceń zachowujących wielkości absolutne. Np. w zagadnieniu jednego ciała w teorii Newtona wielkościami absolutnymi są elementy geometryczne czasoprzestrzeni oraz potencjał pola, w którym ciało się porusza. Jeśli ten potencjał jest stacjonarny i kulistosymetryczny, to grupa obrotów wraz z przesunięciami w czasie stanowi pełny zbiór symetrii układu. Odpowiadają im prawa zachowania momentu pędu i energii. Istnieją dwa sposoby powiększania grupy symetrii: można w ogóle usunąć pewne elementy absolutne albo potraktować je jako zmienne dynamiczne. Z pierwszą z tych możliwości mamy do czynienia przy przejściu z przedrelatywistycznej elektrodynamiki z eterem do szczególnej teorii względności. Usunięcie dwóch elementów absolutnych (eteru i czasu) oraz zastąpienie metryki newtonowskiej przez relatywistyczną prowadzi do grupy Lorentza. Natomiast przejście od teorii szczególnej do ogólnej jest innego rodzaju: metryka, która ma charakter absolutny w teorii szczególnej, staje się wielkością dynamiczną w relatywistycznej teorii grawitacji. W teorii tej nie ma właściwie żadnych elementów absolutnych i dlatego grupa symetrii pokrywa się z grupą wszystkich przekształceń współrzędnych (względnie wszystkich przekształceń punktowych). W tym sensie w teorii grawitacji jest więcej symetrii, a więc i więcej względności niż w teorii szczególnej. Można jednak przyjąć inny punkt widzenia i uważać za symetrie tylko te transformacje, które zachowują strukturę geometryczną czasoprzestrzeni, niezależnie od tego czy struktura ta ma charakter absolutny, czy dynamiczny. Takie jest stanowisko Focka, według którego w relatywistycznej teorii grawitacji jest mniej względności niż w teorii szcze-

gólnej, ponieważ geometria krzywej czasoprzestrzeni jest mniej symetryczna niż płaskiej.

Zasadę względności można ogólnie wysłowić w sposób następujący: przy formułowaniu praw fizyki wolno używać tylko wielkości dynamicznych oraz absolutnych, występujących w danej teorii. A więc np. nie można w szczególnej teorii względności wprowadzać eteru (wyróżnionego układu spoczynkowego). W ogólnej teorii względności nie powinno się wprowadzać pomocniczej, absolutnej metryki płaskiej, albo wyróżnionych układów odniesienia, jak to niektórzy robią. „Ogólna niezmienniczość“ oznacza właśnie, że w teorii grawitacji Einsteina nie ma elementów absolutnych, co jest konsekwencją tego, że pole grawitacyjne jest opisywane za pomocą metryki. W teorii grawitacji Newtona mamy też ślad ogólnej niezmienniczości, związany z tym, że część elementów geometrycznych ma w tej teorii charakter dynamiczny, a część — absolutny.

II

Na podstawie teorii newtonowskiej można sądzić, że siły grawitacyjne nie odgrywają żadnej roli w skali atomowej: oddziaływanie elektromagnetyczne między protonem i elektronem jest ok. 10^{40} razy większe niż oddziaływanie grawitacyjne. Siły grawitacyjne mają zasadnicze znaczenie dla budowy i ruchu ciał makroskopowych. Znane zjawiska, do których z pewnością stosuje się teoria grawitacji, można z grubsza podzielić na następujące trzy dziedziny:

statyka i dynamika ciał makroskopowych,
ruchy ciał o określonej budowie,
kosmologia.

Pierwsza z tych dziedzin obejmuje przede wszystkim zjawiska związane z powstawaniem, budową i ewolucją gwiazd. Do drugiej można zaliczyć ruchy planet i układów gwiazd. Przedmiotem badań kosmologii jest rozkład i ruch materii we Wszechświecie jako całości. W dalszej części artykułu omówimy niektóre wybrane zagadnienia dotyczące tych trzech grup zjawisk.

Końcowe stadia ewolucji gwiazd

Niewiele jeszcze wiadomo na temat narodzin gwiazd, ale na ogół sądzi się, że powstają one drogą kondensacji z materii, która początkowo była rozłożona w sposób równomierny. Młoda gwiazda, to chłodna kula gazowa, która kurcząc się pod wpływem sił grawitacyjnych ogrzewa się i promieniuje. W tym pierwszym okresie życia gwiazdy źródłem energii jest grawitacja. Następnie, po osiągnięciu odpowiedniej temperatury, rozpoczynają zachodzić w gwieździe procesy termojądrowe: spalanie wodoru, potrójny proces α i inne. Po wypaleniu się wszystkich dostępnych źródeł paliwa jądrowego, gwiazda kurczy się. Można się spodziewać, że kurczenie to ustanie dopiero wtedy, gdy siły grawitacyjne

zostaną zrównoważone przez ciśnienie gazu elektronowego, który osiągnie odpowiednio wysoki stopień zwyrodnienia. Stanowi takiemu odpowiada duża gęstość, mały promień i niezbyt wielka jasność gwiazdy. Tego rodzaju cechy spotyka się u białych karłów. Można więc przypuszczać, że białe karły są „starymi” gwiazdami, które już wypaliły podstawowy zapas swej energii i utrzymują się w stanie względnej równowagi dzięki ciśnieniu zwyrodniałego gazu elektronowego. Rachunek pokazuje [3], że na to, aby gwiazda mogła właśnie w takim stanie zakończyć swoją ewolucję, jej masa nie może być zbyt duża. Graniczna, maksymalna masa jest rzędu ¹

$$M_{\odot} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{k} \right)^{3/2}, \quad (5)$$

gdzie m oznacza masę protonu, k — stałą grawitacyjną. Liczbowa wartość $M_{\odot}$ jest tego samego rzędu, co masa Słońca. Wynik ten jest w zgodzie z obserwacjami: nie spotyka się białych karłów o masach przewyższających masę Słońca.

Powstaje pytanie, co dzieje się z gwiazdami o większych masach? Ulegają one dalszemu kurczeniu, które prowadzi do dalszego zwiększania gęstości i wreszcie degeneracji nukleonów. Elektrony, które już przedtem tworzyły gaz zdegenerowany, nie mają teraz gdzie się podziać i za pomocą odwrotnego procesu β łączą się z protonami — zachodzi neutronizacja gwiazdy. Takie hipotetyczne gwiazdy, składające się ze zwyrodniałego, relatywistycznego gazu neutronowego, noszą nazwę gwiazd neutronowych. Odpowiadają im tak duże gęstości, że w obliczeniach dotyczących budowy i równowagi tych obiektów należy uwzględnić poprawki ogólnej teorii względności. Oppenheimer i Volkoff [4] ustalili, że gwiazda neutronowa może znajdować się w równowadze tylko wtedy, gdy jej masa nie przewyższa pewnej wielkości granicznej, tego samego rzędu co $M_{\odot}$. Przy gęstościach występujących w gwiazdach neutronowych istotną rolę odgrywają silne oddziaływania między nukleonami, mogą powstawać hiperony i zmieniać wielkość ciśnienia i równanie stanu gwiazdy. Jednak dotychczasowe próby uwzględnienia tych oddziaływań nie prowadzą do istotnie nowych wyników: ze wszystkich rachunków wynika, że istnieje pewna masa maksymalna, powyżej której gwiazdy będą się nieograniczenie kurczyły. Z drugiej strony wiadomo, że istnieją młode gwiazdy o dużych ma-

¹ Można podać elementarne uzasadnienie wzoru (5): w stanie równowagi, dla dostatecznie dużej masy M gwiazdy, zdegenerowany gaz elektronowy będzie relatywistyczny. Jeśli p oznacza pęd maksymalny elektronów, a V — objętość gwiazdy, to liczba stanów elektronowych N jest rzędu $p^3 V / \hbar^3$. W gazie w pełni zwyrodniałym wszystkie te stany są zajęte, zatem całkowita energia kinetyczna elektronów $E \sim Ncp \sim \hbar c N (N/V)^{1/3}$. W gwiazdzie bez wodoru na jeden elektron przypadają dwie jednostki atomowej masy; zatem $M \sim 2Nm$. Wprowadzając promień gwiazdy R , $V \sim R^3$, otrzymujemy $E \sim \hbar c (M/m)^{4/3} R^{-1}$. Energia potencjalna gwiazdy jest rzędu $kM^2 R^{-1}$; zatem całkowita energia wynosi $\left(\hbar c \left(\frac{M}{m} \right)^{4/3} - kM^2 \right) \frac{1}{R}$. Warunkiem istnienia stanu równowagi jest dodatniość wyrażenia w nawiasie, czyli $M < M_{\odot}$. W przeciwnym wypadku ciśnienie gazu elektronowego nie wystarcza do zrównoważenia sił grawitacyjnych i gwiazda „zapada się”.

sach. Powstaje pytanie, jak będą przebiegać końcowe stadia ewolucji tych gwiazd? Można przypuszczać, że gwiazdy o masach nieco przewyższających masę maksymalną przechodzą przez stadium supernowej, w czasie którego tracą część masy, tak że w końcu ich masa nie przekracza maksymalnej. Szacując na tej podstawie ilość gwiazd supernowych otrzymuje się liczbę znacznie przewyższającą to, co wynika z obserwacji. Zagadnienie ewolucji masywnych gwiazd jest jednym z najbardziej interesujących problemów astrofizyki, którego rozwiązanie wymaga połączenia ogólnej teorii względności z fizyką wysokich energii.

(5)

Zagadnienia ruchu ciał

Ściśle biorąc, w ogólnej teorii względności nie można rozpatrywać ruchu ciał o zadanej budowie. Powinno się rozwiązywać równocześnie zagadnienie budowy i równania ruchu. Okazuje się jednak, że w ogólnej teorii względności, podobnie jak w teorii Newtona, ruch ciał jako całości zależy w nieznacznym stopniu od szczegółów ich budowy i z dobrym przybliżeniem jest wyznaczany przez skończoną liczbę parametrów takich jak masa, wewnętrzny moment pędu i momenty kwadrupolowe. Na tym spostrzeżeniu opiera się metoda traktowania ciał jako osobliwości pola grawitacyjnego. W metodzie tej poszukuje się pola grawitacyjnego, spełniającego równania pola w próżni, które pokrywa się z rzeczywistą metryką czasoprzestrzeni na zewnątrz „rur świata” wyznaczanych przez ciała. Rozwiązania próżniowe posiadają osobliwości, które można uważać za reprezentujące ciała. Początkowo interpretacja i motywacja metody rozwiązań z osobliwościami była nieco inna. Jak wiadomo, Einstein uważał tensor energii — pędu za tymczasowy sposób opisu materii i poszukiwał geometrycznego obrazu wszystkich zjawisk fizycznych. Jedną z prób w tym kierunku polegała na utożsamianiu cząstek z osobliwościami w geometrii czasoprzestrzeni. Celem pracy Einsteina, Infelda i Hoffmanna [5] było wykazanie, że ruch takich osobliwości jest wyznaczony przez równanie grawitacji oraz znalezienie relatywistycznych poprawek do ruchu ciał niebieskich. Równania ruchu były otrzymywane z warunku całkowalności równań pola, który sprowadzał się do żądania znikania pewnych całek po powierzchniach obejmujących osobliwości. Istotną cechą rachunków było użycie metody aproksymacyjnej specjalnie dostosowanej do niezbyt szybkich ruchów. Metoda *EIH* została następnie udoskonalona przez Einsteina i Infelda [6], którzy wprowadzili do rozwiązań wyrażenia dipolowe tak dobrane, aby warunki całkowalności były automatycznie spełnione. Równania ruchu otrzymywało się z żądania znikania tych dodatkowych członów.

Problem ruchu w ogólnej teorii względności był przedmiotem badań również Focka [2], jego uczniów i innych fizyków. Fock używał tej samej metody przybliżeń, co Einstein, Infeld i Hoffmann, ale do opisu ciał posługiwał się rozciągniętym tensorem energii — pędu. Istotną rolę w metodzie Focka od-

grywało ustalenie układu współrzędnych przy pomocy warunku de Dondera. Równania ruchu były otrzymywane przez całkowanie różniczkowych praw zachowania po obszarze zajmowanym przez ciała.

Infeld [7] podał ogólną metodę otrzymywania równań ruchu opartą na zastosowaniu dirakowskich funkcji δ do opisu materii. Doprowadziło to do znacznego uproszczenia rachunków i umożliwiło podjęcie szeregu nowych problemów w związku z zagadnieniem ruchu ciał ze strukturą wewnętrzną. Wyniki osiągnięte w tej dziedzinie przez Infelda, Plebańskiego oraz ich uczniów zostały zebrane w monografii na temat równań ruchu [8]. W szczególności opracowano zagadnienie ruchu ciężkich, obracających się ciał [9], [10] oraz podano fockerowską zasadę wariacyjną dla równań ruchu w ogólnej teorii względności [11], [12].

Jednym z interesujących problemów ogólnych jest sam mechanizm wynikania równań ruchu z równań pola grawitacyjnego. Zakładając, że wszystkie równania, rządzące materią i polem grawitacyjnym można wyprowadzić z niezmienniczej zasady wariacyjnej, na podstawie twierdzeń Noether, otrzymuje się tożsamość, którą symbolicznie można zapisać w postaci:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} + M^{\alpha}(\text{równania ruchu}) + N^{\alpha}(\text{równania pola}) = 0, \quad (6)$$

gdzie $T^{\alpha\beta}$ jest tensorem gęstości energii — pędu materii.

Funkcje M^{α} i N^{α} mają następujące własności:

$$\begin{aligned} \text{zachodzenie równań ruchu jest równoważne } M^{\alpha} &= 0, \\ \text{zachodzenie równań pola pociąga } N^{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Wiadomo ponadto, że na mocy tożsamości Bianchiego, zachodzenie równań Einsteina pociąga $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$.

Z tożsamości (6) wynika więc, że równania ruchu cząstek są konsekwencją równań Einsteina i równań pól „fizycznych“. Pozornie dostaje się tutaj coś za darmo: równania, które w szczególnej teorii względności otrzymuje się żądając stacjonarności całki działania względem zmian linii świata, tutaj zachodzą automatycznie, jeśli spełnione są pozostałe równania dynamiczne. Jankiewicz [13] zwrócił uwagę na to, że tak nie jest. Chodzi o to, że do opisu geometrii czasoprzestrzeni używa się tensora metrycznego o dziesięciu składowych. Tensor ten zawiera również informacje o układzie współrzędnych. Przy zadanej geometrii można narzucić cztery dowolne warunki na składowe tego tensora; tak więc tylko sześć spośród nich naprawdę opisuje stopnie swobody pola grawitacyjnego. Nie istnieje jednak niezmienniczy sposób wyróżnienia tych sześciu składowych. Równania pola grawitacyjnego wynikają z formalizmu wariacyjnego; otrzymuje się je żądając stacjonarności całki działania względem zmian wszystkich dziesięciu składowych. Można łatwo się przekonać, że wariowanie względem czterech dodatkowych składowych jest równoważne wariowaniu linii świata cząstek i dlatego w ogólnej teorii względności otrzymuje się automatycznie równania ruchu. To, że równania te opisują oddziaływanie, wiąże się z nieliniowością równań Einsteina. Jednak sama nielinio-

wość równań pola nie jest ani konieczna dla otrzymania równań ruchu, ani dostateczna na to, aby te równania opisywały cząstki oddziaływające (Staruszkiewicz, [14]).

Łatwo jest ocenić rząd wielkości poprawek relatywistycznych do zjawisk związanych z ruchem ciał pod wpływem sił grawitacyjnych. Jeżeli m , J i a oznaczają, odpowiednio typową masę, moment pędu i odległość występujące w układzie, to efekty relatywistyczne będą proporcjonalne do bezwymiarowych parametrów: $\frac{km}{c^2 a}$, $\frac{kJ}{c^3 a^2}$ oraz im podobnych, jeśli uwzględnić inne cechy struktury i ruchu ciał.

Kosmologia

W dziedzinie kosmologii siły grawitacyjne odgrywają zupełnie zasadniczą rolę. Można się jedynie zastanawiać nad tym, czy, i w jakim stopniu ogólna teoria względności wnosi coś nowego do opisu budowy Wszechświata jako całości. Jak wiadomo [15], kosmologia newtonowska również przepowiada ucieczkę galaktyk i ekspansję materii we Wszechświecie. Ale proste argumenty, oparte na analizie wymiarowej przekonują, że efekty relatywistyczne są w kosmologii duże. Jako charakterystyczną odległość w kosmologii należy wziąć „promień Wszechświata“ c/H , gdzie H oznacza stałą Hubble'a. Jeśli ρ oznacza średnią gęstość materii we Wszechświecie, to wewnątrz kuli o promieniu c/H zawiera się masa rzędu $\rho(c/H)^3$. Rolę ilorazu $km/c^2 a$ odgrywa więc tutaj $k\rho/H^2$; na podstawie obserwacji astronomicznych ten współczynnik jest rzędu jedności. Dla modelu izotropowego i jednorodnego, z równań Einsteina wynika, że krzywizna przestrzeni trójwymiarowej jest proporcjonalna do $\frac{k\rho}{H^2} - 3$.

Jest rzeczą interesującą, że równanie Friedmanna można wyprowadzić bez użycia formalizmu ogólnej teorii względności, tylko na podstawie newtonowskiego prawa zachowania energii. Istotnie, wybierzmy układ odniesienia tak, aby jego początek 0 pokrywał się z położeniem wybranego elementu substratum (galaktyki). Niech $R(t)$ oznacza odległość od 0 w chwili t , innego wybranego elementu substratum o masie jednostkowej. Prawo zachowania energii dla tego elementu ma postać:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{kM}{R} = \text{const},$$

gdzie

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \text{const}$$

jest masą zawartą w kuli o środku 0 i promieniu $R(t)$.

Grawitacja a zjawiska kwantowe

Nie ulega wątpliwości, że zjawiska grawitacyjne, podobnie jak wszystkie inne, muszą mieć jakieś podłoże kwantowe. Obecna, klasyczna teoria grawitacji Einsteina jest z pewnością przybliżeniem ściślejszej teorii, uwzględniającej kwantowy charakter zjawisk mikroświata. Z tak ogólnie sformułowanym poglądem zgadzają się chyba wszyscy fizycy. Duża część teoretyków ma również zdecydowany pogląd na to, jak należy zbudować taką kwantową teorię grawitacji. Przeważa zdanie, że należy to zrobić na wzór elektrodynamiki, traktując metrykę jako potencjał, zastępując pewne składowe tego potencjału przez operatory spełniające odpowiednie reguły komutacyjne itd. Taka procedura, jakkolwiek napotyka na duże trudności techniczne, związane z ogólną niezmienniczością i nieliniowością równań, jest w zasadzie możliwa. Należy jednak pamiętać, że nie każdą teorię klasyczną należy „kwantować”. W każdym razie nie można tego robić w odniesieniu do teorii statystycznych. Trudno jednak uwierzyć w to, aby teoria grawitacji miała być teorią statystyczną typu termodynamiki. Analogie między teorią grawitacji Einsteina i elektrodynamiką Maxwella są tak uderzające, że przeciwnicy kwantowania ogólnej teorii względności są w mniejszości. Można się spodziewać, i potwierdzają to przeprowadzone przez różnych autorów rachunki, że skwantowana teoria grawitacji prowadzi do efektów podobnych do tych, które otrzymuje się w elektrodynamice: transmutacje cząstek z udziałem grawitonów, poprawki grawitacyjne do rozpraszania i poziomów energetycznych atomów itp. Łatwo przewidzieć, że efekty te są niesłychanie małe. Rolę stałej sprzężenia między polem grawitacyjnym i materią gra wielkość o wymiarze długości:

$$l = \sqrt{\hbar/c^3} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}.$$

Efekty kwantowo-grawitacyjne będą proporcjonalne do odpowiednich potęg stosunku l/λ , gdzie λ jest długością fali charakterystyczną dla danego problemu. Dla osiągalnych obecnie energii ten stosunek jest bardzo mały.

Wydaje mi się, że jeśli powiązanie teorii względności z teorią kwantów wniesie coś istotnie nowego do fizyki, to nastąpi to na innej drodze niż konwencjonalne kwantowanie pola grawitacyjnego. Należy pamiętać, że teoria względności to również teoria budowy czasoprzestrzeni. U jej podstaw leży hipoteza, że czasoprzestrzeń jest ciągła, dokładniej, że posiada strukturę rozmaitości różniczkowalnej. To założenie wydaje się być uzasadnione na gruncie fizyki klasycznej, ale jest dalekie od oczywistości, gdy wziąć pod uwagę kwantową naturę zjawisk. Teorie z ciągłą czasoprzestrzenią zakładają możliwość identyfikacji dowolnie bliskich zdarzeń. Ale to ze względu na atomową budowę materii oraz skończone wymiary cząstek elementarnych nie jest wykonalne. Można spekulować, że ta zasadnicza niemożliwość powinna mieć swoje odbicie w budowie czasoprzestrzeni, podobnie do tego, jak lokalna nierozróżnialność sił grawitacyjnych od sił inercji jest w naturalny sposób uwzględ-

niana w ogólnej teorii względności. Oczywiście, każda zmiana założeń o budowie czasoprzestrzeni pociągnęłaby za sobą gruntowną rewizję teorii grawitacji i całej fizyki.

Fale grawitacyjne

Istnienie promieniowania i fal grawitacyjnych zostało teoretycznie uzasadnione przez Einsteina wkrótce po sformułowaniu równań ogólnej teorii względności. Ówczesne rachunki Einsteina były oparte na przybliżonych liniowych równaniach pola i z tego powodu były często krytykowane; linearyzacja równań w istotny sposób zmienia ich własności. Jednak bardzo liczne i szczegółowe prace na temat promieniowania grawitacyjnego, oparte na ścisłych równaniach pola, wykazały, że przewidywania Einsteina były słuszne i potwierdziły otrzymane przez niego wzory na moc promieniowania układów izolowanych.

Bez szczegółowych obliczeń łatwo się przekonać, że promieniowanie grawitacyjne jest bardzo słabe we wszystkich sytuacjach, z którymi mamy do czynienia w najbliższym nam otoczeniu Wszechświata. Prawa zachowania energii i pędu powodują, że promieniowanie to zaczyna się od typu kwadrupolowego. Elementarne, nie wykorzystujące równań Einsteina obliczenia, pozwalają ocenić rząd wielkości promieniowania wytwarzanego np. przez gwiazdę podwójną [16]:

$$P \sim \frac{mc^2}{r/c} \left(\frac{km}{c^2 r} \right)^4.$$

Tutaj m oznacza masę gwiazdy, r — odległość między jej składowymi. Dla analogicznego problemu w elektrodynamice (nierelatywistyczny ruch ładunków e i $-e$ po kole o promieniu r):

$$P_{\text{em}} \sim \frac{mc^2}{r/c} \left(\frac{e^2}{mc^2 r} \right)^3.$$

Widać stąd, że promieniowanie grawitacyjne nie ma znaczenia dla układów atomowych. Jeśli przyjąć za e i m ładunek i masę elektronu, a za r — promień atomu, to:

$$\frac{e^2}{mc^2 r} \sim \alpha^2 \sim 10^{-4}$$

$$\frac{km}{c^2 r} \sim 10^{-47}.$$

Znaczne ilości energii grawitacyjnej promieniają gwiazdy podwójne o bardzo bliskich składowych i krótkich okresach obrotu (np. układ WZ Sagittae o masach 0,6 i 0,03 masy Słońca oraz okresie 81 min). Można również spodziewać się znacznego promieniowania grawitacyjnego przy niesymetrycznym zapadaniu się (*collapse*) gwiazd [17], [18]. Interesujące jest zagadnienie promienio-

wania grawitacyjnego ładunku poruszającego się w zewnętrznym polu magnetycznym. Wiadomo, że pewne składowe promieniowania kosmicznego są wynikiem promieniowania synchrotronowego elektronów relatywistycznych w polu magnetycznym. Infeld i R. Trautman [19] pokazali, że w przybliżeniu nierelatywistycznym natężenie promieniowania grawitacyjnego dla tego zagadnienia jest rzędu

$$P \sim \frac{mc^2}{r/c} \left(\frac{v}{c}\right)^4 \frac{km}{c^2 r}.$$

Promieniowanie to występuje w rzędzie v/c niższym niż w przypadku ciał oddziaływających jedynie grawitacyjnie. Jednak interpretacja fizyczna tego wyniku wymaga dużej ostrożności ze względu na trudności związane z pojęciem pola zewnętrznego w ogólnej teorii względności.

Doświadczalne sprawdzanie ogólnej teorii względności

Dobrze znane są trzy klasyczne przewidywania teorii Einsteina oraz to, w jaki sposób i w jakim stopniu zostały one potwierdzone przez doświadczenia i obserwacje. Ostatnim sukcesem w tej dziedzinie były pomiary zmiany częstości promieniowania elektromagnetycznego w polu grawitacyjnym Ziemi wykorzystujące efekt Mössbauera. Po tych doświadczeniach radykalnie zmieniło się znaczenie pomiarów przesunięcia linii widmowych promieniowania słonecznego. Obecnie, zamiast analizować te pomiary pod względem ich zgodności z teorią Einsteina, należy je traktować jako źródło informacji o budowie i ruchu materii słonecznej [20].

Wysuwane są projekty i prowadzone próby wykrycia promieniowania grawitacyjnego padającego na Ziemię z przestrzeni kosmicznej. Są to ambitne zamierzenia, które, gdyby się powiodły, stanowiłyby duży sukces. W przypadku wyniku negatywnego, pomiary takie dadzą jedynie górną granicę natężenia promieniowania w badanym zakresie częstości. Wydaje się jednak, że przy obecnych możliwościach technicznych doświadczenia te w żadnym wypadku nie mogą być rewelacyjne. Trudno się spodziewać, ażeby w przewidywalnej przyszłości można było uprawiać astronomię opartą o „teleskopy grawitacyjne“.

Niedawno Shapiro [21] podał nowy, czwarty sposób sprawdzenia ogólnej teorii względności. Polega on na wykorzystaniu tego, że prędkość światła, definiowana przy użyciu „czasu światowego“, w pobliżu ciał jest mniejsza od c . Jeśli w polu grawitacyjnym z punktu odległego o R od masy M wysłać światło w kierunku M do punktu odległego o r od tej masy, a następnie z powrotem, to czas przebiegu światła będzie o $\frac{4kM}{c^3} \ln \frac{R}{r}$ dłuższy niż w pustej przestrzeni. Shapiro proponuje, aby do pomiarów użyć impulsów radarowych odbijanych od Merkurego. Autor niniejszego artykułu dowiedział się pry-

watnie, że doświadczenie to będzie wykonane, a jego koszt wyniesie około miliona dolarów.

Należy się cieszyć, że ogólna teoria względności posiada przeciwników, którzy tak bardzo chcieliby widzieć ją obaloną, że są gotowi przeznaczać tak wielkie sumy pieniężne na doświadczenia jej sprawdzanie.

Theory of relativity

Abstract: The article, based on a lecture given at the XIXth Meeting of the Polish Physical Society in Cracow, contains a review of a number of problems of current interest in the theory of general relativity, with special emphasis on the research done in Poland. The first part is devoted to an analysis of the foundations of Einstein's theory of gravitation. An attempt has been made to formulate the principle of equivalence and the principle of relativity more precisely than this is usually done. The second part of the article contains a short review of such questions as the problem of late stages in the evolution of stars, equations of motion in general relativity, gravitational radiation and the relation between quantum and gravitational phenomena.

Literatura

- [1] A. Einstein, *Istota teorii względności*, PWN, Warszawa, 1958.
- [2] V. A. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, London, 1959.
- [3] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications, New York, 1957.
- [4] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **55**, 374 (1939).
- [5] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 65 (1938).
- [6] A. Einstein, L. Infeld, *Canad. J. Math.*, **1**, 209 (1949).
- [7] L. Infeld, *Acta Phys. Polon.*, **13**, 187 (1954).
- [8] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, PWN and Pergamon Press, Warszawa, 1960.
- [9] W. Tuleczyjew, *Acta Phys. Polon.*, **18**, 37 (1959).
- [10] R. Michalska, *Bull. Acad. Polon. Sci., sér., sci. math., astr. et. phys.*, **8**, 233, 237 i 247 (1960).
- [11] L. Infeld, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 398 (1957).
- [12] J. Plebański, S. Bazański, *Acta Phys. Polon.*, **18**, 307 (1959).
- [13] C. Jankiewicz, *Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astron., phys.*, **7**, 175 (1959).
- [14] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Polon.*, **24**, 735 (1963).
- [15] H. Bondi, *Cosmology*, Cambridge University Press, 1960.
- [16] A. Trautman, F. A. E. Pirani, H. Bondi, *Lectures on general relativity*, Brandeis Summer Institute, 1964.
- [17] J. B. Zeldowicz, I. D. Nowikow, *DAN SSSR*, **155**, 1033 (1964).
- [18] I. S. Szklowski, N. S. Kardaszew, *DAN SSSR*, **155**, 1039 (1964).
- [19] L. Infeld, R. Trautman, praca w przygotowaniu.
- [20] P. G. Bergmann, *Concluding Remarks w Konferencji międzynarodowej na temat teorii relatywistycznej grawitacji* (Warszawa—Jabłonna 1962), PWN, 1964.
- [21] I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 789 (1964).