Andrzej Trautman
Uniwersytet Warszawski

Galileusza ogólna teoria względności *

Według Arystotelesa ruch miał charakter bezwzględny i ustawał, gdy zanikała wywołująca go przyczyna. Czas spadania ciał na Ziemię miał zależeć od „wielkości" tych ciał; używając dzisiejszego języka można powiedzieć, że według Arystotelesa czasy spadania ciał z tej samej wysokości powinny być odwrotnie proporcjonalne do ich mas. Najważniejszy wkład Galileusza do podstaw fizyki to obalenie tych poglądów, odkrycie względności ruchu, które później Newton wyraził w postaci prawa bezwładności. Przypisuje się również Galileuszowi wykonywanie doświadczeń polegających na obserwacji spadania rozmaitych ciał z krzywej wieży w Pizie. Obserwacje te miały go przekonać o tym, że gdyby usunąć opór powietrza, to wszystkie ciała spadałyby jednakowo. Inaczej mówiąc, Galileusz odkrył równość masy bezwładnej i ważkiej [1].

Celem referatu jest przedstawienie uogólnienia mechaniki Newtona na przypadek, gdy w całej przestrzeni występuje pole grawitacyjne. Uogólnienie to otrzymuje się analizując znaczenie fizyczne pierwszej zasady dynamiki oraz uwzględniając równość masy bezwładnej i ważkiej. Teoria, która w ten sposób powstaje nieco przypomina teorię grawitacji Einsteina i jest tak naturalnym uogólnieniem mechaniki Newtona, że zwykle nie nadaje się jej odrębnej nazwy [2]. Ze względu na to, że u podstaw tej teorii leży analiza tych założeń mechaniki, które wiążą się z imieniem Galileusza, proponuję, aby nazwać ją ogólną teorią względności Galileusza.

Zastanówmy się nad postulatami mechaniki Newtona, pomijając na razie istnienie grawitacji. Zgodnie z popularnym charakterem tego wykładu rezygnujemy ze ścisłości sformułowań; nietrudno uzupełnić poniższy tekst odpowiednimi założeniami matematycznymi. Czasoprzestrzeń teorii Newtona to czterowymiarowa rozmaitość (różniczkowalna), której punkty nazywają się zdarzeniami. Według Newtona

I. Istnieje absolutne pojęcie równoczesności zdarzeń, tzn. podział czasoprzestrzeni na klasy równoważności zdarzeń równoczesnych. Zbiór zdarzeń należących do jednej klasy nazywa się przestrzenią; zakłada się, że wszystkie przestrzenie są jednakowe i że:

---

* Referat wygłoszony 3 kwietnia 1964 r. na posiedzeniu Warszawskiego Oddziału PTF, poświęconym uczczeniu czterechsetnej rocznicy urodzin Galileusza.

II. Przestrzeń jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową. Czas to dowolny parametr t numerujący klasy zdarzeń równoczesnych; można go poddawać przekształceniom $t \to f(t)$. Na mocy (II), w każdej przestrzeni $t = \text{const}$ można wprowadzić kartezjański układ współrzędnych, wektory itd.; jednak dopóki nie powie się czegoś więcej, nie można „uzgodnić“ układów współrzędnych przestrzennych w różnych chwilach czasu. Mechanika zajmuje się ruchami punktów materialnych; obrazem ruchu w czasoprzestrzeni jest krzywa, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą klasą zdarzeń równoczesnych; jest jasne, że ruch można opisać przy pomocy funkcji wektorowej czasu, $\vec{r}(t)$. Pierwsza zasada dynamiki mówi, że pewien sposób wyboru czasu oraz wzajemnego położenia układów współrzędnych w różnych chwilach czasu jest szczególnie wygodny do opisu zjawisk mechanicznych. Dokładniej, według pierwszej zasady Newtona

III. 1. Istnieje wyróżniona rodzina ruchów swobodnych i 2. Można wprowadzić czas t (tzn. parametryzację klas zdarzeń równoczesnych) oraz układy współrzędnych kartezjańskich w różnych chwilach czasu w ten sposób, aby ruchy swobodne odbywały się zgodnie z równaniem

$$\ddot{\vec{r}} = 0 . \tag{1}$$

Postulat III. 1 należy uzupełnić założeniem, że ruchów swobodnych jest „dużo“, w łatwym do zrozumienia znaczeniu. Układy odniesienia wyróżnione przez III. 2 to układy inercjalne. Z równania (1) wynika, że przekształcenie Galileusza

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{V}t + \vec{r}_0 , \quad \vec{V}, \vec{r}_0 = \text{const} , \tag{2}$$

prowadzi od układu inercjalnego do innego układu o tej samej własności. Dysponując pojęciem układu inercjalnego nietrudno sformułować pozostałe założenia dynamiki, w szczególności drugą zasadę Newtona.

Ruchy swobodne to jedna z wielu idealizacji, które się wprowadza w fizyce. Doświadczenie uczy, że jeśli zaniedbać pola grawitacyjne, to w granicach ważności fizyki klasycznej można realizować takie ruchy z dowolną dokładnością. Inaczej jest gdy występuje pole grawitacyjne. Ze względu na równość obu rodzajów masy, wszystkie ciała podlegają siłom grawitacyjnym, nie ma substancji grawitacyjnie obojętnych. Usuwając wszystkie te oddziaływania, które lokalnie można usunąć (biorąc ciała elektrycznie obojętne, wypompowując powietrze z obszaru, gdzie wykonuje się doświadczenia, itd.) otrzymujemy klasę ruchów, które można nazwać spadkami swobodnymi. Najczęściej mamy do czynienia z polem grawitacyjnym izolowanego układu mas, zmierzającym do zera przy oddalaniu się od tych mas (np. pole Słońca). W takich wypadkach do określenia układów inercjalnych można używać spadków swobodnych zachodzących w dużych odległościach od układu mas, tzn. w obszarze, gdzie pole grawitacyjne jest bardzo słabe. Z doświadczenia wynika, że pole grawitacyjne można wtedy opisać przy pomocy potencjału $\varphi(\vec{r}, t)$ znikającego w nieskończoności,

$$\lim_{r\to\infty} \varphi = 0 , \tag{3}$$

a równania spadków swobodnych są

$$\ddot{\vec{r}} = -\operatorname{grad}\varphi . \tag{4}$$

Niech teraz $\vec{a}(t)$ będzie dowolnym wektorem zależnym od czasu; przekształcenie

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{a}(t) \tag{5}$$

prowadzi do układu nieinercjalnego (chyba, że $\ddot{\vec{a}} = 0$). Równanie spadku swobodnego (4) przechodzi w

$$\ddot{\vec{r}}\,' = -\operatorname{grad}\varphi' , \tag{6}$$

gdzie

$$\varphi' = \varphi + \ddot{\vec{a}}\cdot\vec{r} + b \tag{7}$$

oraz b oznacza dowolną funkcję czasu. Równanie (6) jest tej samej postaci co (4), ale układ inercjalny, użyty do zapisu (4), jest wyróżniony przez warunek brzegowy (3). Łatwo widać, że jeśli φ spełnia w układzie inercjalnym równanie Poissona

$$\Delta\varphi = 4\pi k\varrho \tag{8}$$

to również φ' spełnia w układzie nieinercjalnym $\vec{r}\,'$ równanie tej postaci, z tą samą gęstością masy ϱ.

Przypuśćmy teraz, że mamy do czynienia z nieograniczonym rozkładem mas, tzn. że nie można podać ograniczonego obszaru przestrzeni, na zewnątrz którego ϱ znika. Nie można się wówczas spodziewać, aby istniały rozwiązania równania (8) spełniające (3). W takim razie trzeba zrezygnować z wyróżnionej roli układów inercjalnych i uważać za równie dobre wszystkie układy odniesienia, w których równania spadków swobodnych są postaci (4). Inaczej mówiąc, jeśli pole grawitacyjne nie znika nawet asymptotycznie, to nie istnieją ruchy swobodne, które są potrzebne do określenia układów inercjalnych, a zatem samo pojęcie układu inercjalnego traci sens fizyczny. Niektórzy nazywają inercjalnymi wszystkie te układy, w których zachodzi (4) lub (6), ale klasa tych układów jest znacznie obszerniejsza niż klasa układów inercjalnych w zwykłym znaczeniu tego słowa.

Podsumowując, pierwszą zasadę dynamiki można uogólnić w sposób następujący:

III'. 1. Istnieje wyróżniona rodzina ruchów, zwanych spadkami swobodnymi;

2. Można wybrać parametryzację czasu, wprowadzić współrzędne oraz znaleźć funkcję $\varphi(\vec{r}, t)$ taką, że równania spadków swobodnych będą postaci

$$\ddot{\vec{r}} = -\operatorname{grad}\varphi .$$

Układy współrzędnych, o których mowa w III'. 2 będziemy nazywali wyróżnionymi. Równanie (5) stanowi najogólniejszą transformację współrzędnych wyróżnionych; można ją nazwać uogólnionym przekształceniem Galileusza; towarzyszy jej przekształcenie (7) potencjału grawitacyjnego φ. Pod wpływem tego przekształcenia zarówno potencjał, jak i jego gradient ulega zmianie, natomiast drugie pochodne potencjału są niezmiennicze. Widać od razu, że na to, aby pole φ można było usunąć przez transforamcję układu, potrzeba i wystarczy, aby

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_l} = 0\,, \qquad k, l = 1, 2, 3\,.$$

Uogólnioną teorię Newtona stosuje się w kosmologii [2]. Najprostsze założenie, jakie można uczynić o rozkładzie materii we Wszechświecie i o jej ruchu znajduje wyraz w zasadzie kosmologicznej, według której Wszechświat jest wszędzie taki sam, jeśli pominąć lokalne nieregularności. Dokładniej, w teorii Newtona można przyjąć, że średnia gęstość materii zależy tylko od czasu, $\varrho = \varrho(t)$, a uśrednione pole prędkości w pewnym układzie wyróżnionym jest postaci

$$\vec{v}\,(\vec{r}\,, t) = \frac{\dot{R}}{R}\vec{r}\,, \tag{9}$$

gdzie $R(t)$ jest funkcją czasu. Pole prędkości (9) nie wyróżnia żadnego kierunku ani punktu. Istotnie, punkt materialny (element substratum), którego promień wodzący jest $\vec{r}_1$ porusza się z prędkością $\vec{v}\,(r_1, t) = \frac{\dot{R}}{R}\vec{r}_1$ względem układu współrzędnych użytego we wzorze (9). Jeśli natomiast wprowadzić układ, względem którego ten punkt spoczywa, to pole prędkości będzie

$$\vec{v}\,(\vec{r}\,, t) - \vec{v}\,(\vec{r}_1, t) = \vec{v}_1(\vec{r}\,', t) = \frac{\dot{R}}{R}\vec{r}\,'\,,$$

gdzie

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_1\,, \tag{10}$$

tzn. będzie tej samej postaci co (9). Oznacza to, że każdy obserwator poruszający się razem z substratum widzi taki sam rozkład prędkości. Ze wzoru (9) łatwo otrzymuje się postać ruchu substratum,

$$\vec{r}\,(t) = R(t)\vec{r}_0\,,$$

gdzie $\vec{r}_0$ jest dowolnym stałym wektorem. Przekształcenie (10) jest zatem uogólnioną transformacją Galileusza. Aby móc uważać różne punkty substratum za równoważne, należy zrezygnować z uprzywilejowanej roli układów inercjalnych i nadać tę godność szerszej klasie układów, które nazwaliśmy tutaj wyróżnionymi.

Wygodnie jest unormować funkcję $R(t)$ tak, aby w chwili czasu t_0 odpowiadającej teraźniejszości było $R(t_0) = 1$; wówczas $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. Rozpatrzmy jednostkę masy substratum, która w chwili t_0 znajduje się w jednostkowej odległości od początku układu. Prawo zachowania energii dla tego elementu substratum daje

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{kM}{R} = \varepsilon = \text{const}\,, \tag{11}$$

gdzie

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho(t_0)\,.$$

Równanie (11) można rozwiązać, jeśli znana jest obecna średnia gęstość materii $\varrho(t_0)$ oraz wielkość stałej Hubble'a $\dot{R}(t_0)$. Friedmann otrzymał równanie tej samej postaci co (11) w oparciu o einsteinowską teorię grawitacji; w teorii tej $-2\varepsilon/R^2$ jest krzywizną przestrzeni $t = \text{const}$ [3].

Literatura

[1] A. Einstein, L. Infeld, *Ewolucja Fizyki*, PWN, Warszawa 1962.
[2] O. Heckman, E. Schücking, *Handbuch der Physik*, 53, Springer, Berlin 1959, s. 489.
[3] A. Einstein, *Istota teorii względności*, PWN, Warszawa 1958.