15.

Andrzej Trautman
Instytut Fizyki PAN

O promieniowaniu grawitacyjnym*

Zagadnienie fal i promieniowania grawitacyjnego liczy przeszło 40 lat. Wkrótce po sformułowaniu zasad ogólnej teorii względności Einstein opublikował pracę [1] zawierającą teorię fal płaskich i promieniowania słabych pól grawitacyjnych, tzn. teorię opartą na liniowym przybliżeniu równań grawitacji. Praca ta została później rozwinięta przez Weyla [2] i Eddingtona [3]. W 1937 r. Einstein i Rosen [4] podjęli próbę znalezienia rozwiązań ścisłych, przedstawiających fale płaskie. Doszli oni wtedy do wniosku, że takie rozwiązania muszą być osobliwe, a więc niefizyczne; udało im się jednak znaleźć fale cylindryczne. W tym samym okresie problem promieniowania został zaatakowany z innej strony w związku z pracami Einsteina, Infelda i Hoffmanna [5] nad równaniami ruchu w ogólnej teorii względności. Od początku było jasne, że rozwiązania przyjmowane w metodzie Einsteina, Infelda i Hoffmanna (EIH) opisują pola typu fali stojącej. Opierając się na analogiach z elektrodynamiką Infeld [6] zbadał wpływ tzw. członów promienistych i pokazał, że nie dają one żadnych poprawek do równań ruchu aż do 7 rzędu włącznie (równania newtonowskie są w metodzie EIH równaniami czwartego rzędu). Następnie Hu [7], a ostatnio Peres [8] wykonali obliczenia uwzględniające poprawki promieniste w 9. rzędzie. Wynik rachunków Hu był pozornie paradoksalny: równania ruchu miały taki kształt, jak gdyby wypromieniowaniu energii grawitacyjnej towarzyszyło *ujemne* tarcie promieniste. Niedawno Bondi [9] znalazł ścisłe rozwiązanie równań pola grawitacyjnego, reprezentujące fale płaskie bez osobliwości. Marder [10] zbadał możliwe postaci tensora energii-pędu materii wytwarzającej fale cylindryczne oraz przytoczył przykłady idealnych eksperymentów, pozwalających wykryć promieniowanie grawitacyjne. Pirani [11] i Lichnerowicz [12] podali geometryczną charakterystykę czasoprzestrzeni, których lokalna struktura przypomina falę płaską.

* Opracowane na podstawie autoreferatu pracy doktorskiej, bronionej dnia 13.I.1959 r. w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie.

Dotychczas w doświadczeniu nie udało się wykryć żadnych śladów promieniowania grawitacyjnego. W ostatnich latach zagadnienie to stało się jednak przedmiotem pewnego zainteresowania, głównie w związku z próbami skwantowania pola grawitacyjnego.

Cała problematyka promieniowania grawitacyjnego jest oparta na analogiach między teorią grawitacji i elektrodynamiką. Nie jest łatwo podać definicję promieniowania w ogólnej teorii względności. Zamiast to czynić, lepiej jest badać, które ze zjawisk towarzyszących promieniowaniu w elektrodynamice występują również w teorii grawitacji. Promieniowanie elektromagnetyczne jest związane z możliwością przenoszenia na odległość energii pod postacią fal, a matematycznie — z charakterem hiperbolicznym równań Maxwella. Wiąże się z tym istnienie tarcia promienistego powodującego, że według elektrodynamiki klasycznej elektron w atomie powinien spadać na jądro[1]. Przenosząc to zagadnienie do teorii grawitacji pytamy, czy można spodziewać się zjawiska spadania Ziemi na Słońce pod wpływem grawitacyjnego tarcia promieniowania. Dalej, w teorii grawitacji nasuwa się konieczność sformułowania warunków brzegowych, analogicznych do warunków wypromieniowania w elektrodynamice. Nieciągłości pola elektromagnetycznego, które można uważać za matematyczne odpowiedniki czoła fali, rozchodzą się w próżni po charakterystykach, tzn. z prędkością światła. Podobnie skoki tensora krzywizny mogą opisywać czoło fali grawitacyjnej.

Dokładniejsze badanie wymienionych tu analogii wiąże się z dużymi trudnościami. Spowodowane są one *ogólną niezmienniczością* teorii Einsteina. Fizyczną podstawą ogólnej niezmienniczości jest zasada równoważności, a jej konsekwencją — nieliniowość równań pola. Innymi słowy, istota trudności leży w osobliwym charakterze pola grawitacyjnego, którego potencjały równocześnie opisują strukturę metryczną czasoprzestrzeni. W związku z tym: 1. nie ma zasady superpozycji pól grawitacyjnych, 2. w ogólnej teorii względności trudno jest określić pojęcie energii oraz 3. brak jest prostego związku między promieniowaniem a charakterem ruchu ciał. Omówimy teraz pokrótce istotę tych trudności.

Brak zasady superpozycji pól grawitacyjnych utrudnia konstruowanie rozwiązań falowych, uniemożliwia wprowadzenie funkcji Greena itp. Nie to stanowi jednak główną trudność. Widać to na przykładzie elektrodynamiki Borna-Infelda, która też jest nieliniowa, a nie nastręcza większych kłopotów, jeśli chodzi o zagadnienie fal i promieniowania.

[1] Jeśli przyjąć rozwiązanie równań pola w postaci potencjałów opóźnionych. Elektrodynamika jako teoria niezmiennicza względem odbicia czasu nie wyróżnia potencjałów opóźnionych względem przedwczesnych. Aby zapewnić zgodność z doświadczeniem, uzupełnia się ją dodatkowymi warunkami (np. Sommerfelda), wprowadzającymi „strzałkę czasu". Takie postępowanie nie jest zadowalające z punktu widzenia teorii, ale dyskusja tego problemu nie mieści się w ramach niniejszego artykułu.

Bardzo trudno jest w sensowny sposób wprowadzić pojęcie *energii grawitacyjnej*. Jeśli składowe tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ są potencjałami pola grawitacyjnego, to zgodnie z ogólnymi zasadami teorii pola można się spodziewać, że gęstość energii będzie pewną formą kwadratową symboli Christoffela. Wiadomo jednak, że dla dowolnego punktu czasoprzestrzeni można dobrać taki układ współrzędnych, w którym wszystkie symbole Christoffela znikają. Inaczej mówiąc, przez wybór układu odniesienia można w danym punkcie „wytransformować" pole grawitacyjne; fizyczne źródło tego faktu leży w zasadzie równoważności, a więc u samych podstaw ogólnej teorii względności. Widać już stąd, że w żadnym razie nie można mówić o lokalnym rozkładzie energii grawitacyjnej. W ogólnej teorii względności nie ma tensorowych praw zachowania[2] w postaci zwykłej dywergencji, a więc nie ma również „dobrego" wektora Poyntinga, który by służył do obliczania strumienia promieniowanej mocy. Czasami wysuwa się pogląd, że pole grawitacyjne jest reprezentowane raczej przez tensor Riemanna niż przez symbole Christoffela. Jeśli tak, to energię pola grawitacyjnego należałoby opisywać przy pomocy formy kwadratowej zbudowanej z tensora krzywizny. Można skonstruować w ten sposób pewien tensor czwartego rzędu o własnościach przypominających tensor energii-pędu pola elektromagnetycznego [15].

W elektrodynamice istnieje bezpośredni związek promieniowania z przyśpieszonym ruchem ładunków. Natomiast w teorii grawitacji każde sferyczne i nieobracające się ciało porusza się po geodetyce, czyli po prostej, a więc właściwie ruchem jednostajnie postępowym.

Pewne informacje na temat promieniowania grawitacyjnego, a mianowicie to, że o ile istnieje, to jest bardzo słabe, można otrzymać bez żadnych rachunków, z ogólnych rozważań jakościowych. W elektrodynamice prawo zachowania ładunku uniemożliwia fale kuliste, możliwe jest jedynie promieniowanie dipolowe oraz wyższego rzędu. Promieniowanie dipolowe znika, gdy wszystkie ładunki mają ten sam stosunek e/m. Podobnie jest w teorii grawitacji. Prawo zachowania masy uniemożliwia fale kuliste (twierdzenie Birkhoffa), a prawo zachowania pędu — promieniowanie dipolowe. Możliwe są tylko fale *kwadrupolowe* i wyższe. Można inaczej wytłumaczyć brak promieniowania dipolowego tym, że stosunek czynnej masy grawitacyjnej do masy inercjalnej jest dla każdego ciała równy jedności.

Einstein w pracy z 1918 r. obliczył promieniowanie kwadrupolowe obracającego się pręta w pierwszym liniowym przybliżeniu. Rachunek ten jest powtarzany we wszystkich podręcznikach teorii względności. Nie przesądza on jednak sprawy istnienia promieniowania grawitacyjnego. Pole

[2] Jak wiadomo, istnienie dziesięciu tensorowych praw zachowania w szczególnej teorii względności jest konsekwencją własności symetrii przestrzeni Minkowskiego, która dopuszcza 10-parametrową grupę izometrii (transformacji Lorentza) [13], [14].

przybliżone, otrzymane przez Einsteina, jest okresowe i ma reprezentować promieniowanie. Można natomiast pokazać, że okresowe pole grawitacyjne, będące ścisłym rozwiązaniem równań pola, może opisywać tylko fale stojące. Łatwo to zrozumieć, gdyż wypromieniowaniu muszą towarzyszyć efekty sekularne, a więc pole nieperiodyczne. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy pole znalezione przez Einsteina może opisywać promieniowanie, trzeba przejść do wyższych rzędów aproksymacji.

Einstein i inni obliczając promieniowaną energię opierali się na tzw. pseudotensorze energii-pędu, który jest pewną formą kwadratową pierwszych pochodnych $g_{\mu\nu}$, a więc nie jest tensorem. W związku z tym przedstawianie promieniowanej mocy w postaci całki powierzchniowej grawitacyjnego wektora Poyntinga jest niejednoznaczne, zależy od wyboru układu współrzędnych. Infeld [16] ostatnio pokazał, że dla pola grawitacyjnego wytwarzanego przez izolowany układ ciał zawsze można wybrać taki układ współrzędnych, aby strumień wektora Poyntinga przez zamkniętą powierzchnię w nieskończoności był równy zeru.

Powstaje zatem pytanie, czy nie jest tak, że wszystkie rozwiązania lub zjawiska, które określa się mianem promieniowania grawitacyjnego, są związane z wyborem układu i można je przez wybór innego układu usunąć. Że jednak tak nie jest, widać już chociażby z istnienia fal płaskich lub cylindrycznych. Trochę trudniej jest zbadać ten problem w ramach metody EIH. Chodzi tu o problem usuwalności członów promienistych przez wybór układu [17]. Aby wyjaśnić istotę zagadnienia, rozwińmy względem $1/c$ skalarny potencjał opóźniony

$$\frac{a(t-r/c)}{r} = \frac{a(t)}{r} - \frac{1}{c}\dot{a}(t) + \frac{1}{2c^2} r\ddot{a}(t) + \dots$$

Tego typu rozwinięcia używane są w metodzie EIH [5]. Rozwinięcie potencjału symetrycznego różni się od powyższego tym, że nie zawiera nieparzystych potęg $1/c$ — wyrazy te noszą nazwę promienistych. Podobnie można rozwinąć potencjały elektromagnetyczne A_μ oraz potencjały grawitacyjne $g_{\mu\nu}$. Jeśli chodzi o potencjały elektromagnetyczne i grawitacyjne, to ich postać przy zadanym polu nie jest jednoznaczna. Pierwsze można zmieniać przez cechowanie, a drugie — przez transformację układu. Warunkiem anihilowalności potencjałów elektromagnetycznych A jest znikanie pola $f = \operatorname{rot} A$, a warunkiem anihilowalności potencjałów grawitacyjnych — znikanie tensora krzywizny. W metodzie aproksymacyjnej odpowiada temu znikanie zlinearyzowanego tensora Riemanna. Zgodnie z wynikami Infelda [6] pierwszymi członami promienistymi, które mogą dać przyczynki do równań ruchu w dziewiątym rzędzie, są pola $\underset{5}{g_{ik}}, \underset{6}{g_{0k}}, \underset{7}{g_{00}}$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Wskaźniki pod symbolem funkcji oznaczają tu rząd rozwinięcia względem

$1/c$. Warunkiem anihilowalności tych pól jest $\underset{7}{R}_{i00k} = 0$ ($R_{\mu\nu\varrho\sigma}$ oznacza tensor krzywizny). Okazuje się jednak, że istnieją człony promieniste, zgodne z równaniami pola i ruchu, dla których $\underset{7}{R}_{i00k} \neq 0$. Pola takie są więc istotnie różne od pól opisywanych przez zwykłą metodę EIH, w której przyjmuje się $\underset{5}{g}_{ik} = \underset{6}{g}_{0k} = \underset{7}{g}_{00} = 0$. Dla przykładu można przeprowadzić [17] rachunki w przypadku dwu ciał o równych masach, poruszających się w teorii Newtona po okręgu. W równaniach ruchu do 9. rzędu pojawiają się poprawki promieniste. Otrzymane w ten sposób równania ruchu są typu

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2(x)x = 0,$$

gdzie $\alpha > 0$ jest stałą. Ale wynik ten nie oznacza jeszcze, że ruch jest tłumiony i ciała spadają na siebie. Postać równań ruchu zależy od układu współrzędnych; można przez transformację układu usunąć człon $2\alpha\dot{x}$. Ta sama uwaga stosuje się do równań otrzymanych przez H u i P e r e s a.

W każdym razie widać jednak, że określonemu ruchowi newtonowskiemu odpowiada w wyższych rzędach przybliżeń więcej niż jedno pole grawitacyjne. Wśród tych pól jest jedno odpowiadające fali stojącej; otrzymuje się je w metodzie EIH przez opuszczanie członów promienistych. Są również takie pola, które przypominają potencjały opóźnione lub przedwczesne. Dalszego zbadania wymaga natomiast znaczenie fizyczne takich pól, tzn. charakter ewentualnych zmian sekularnych ruchu ciał wytwarzających te pola.

Chcielibyśmy w tym miejscu zwrócić uwagę na interpretację fizyczną równań ruchu w ogólnej teorii względności. W fizyce newtonowskiej oraz w szczególnej teorii względności można bezpośrednio z postaci równań ruchu albo z kształtu ich rozwiązania odczytać charakter ruchu, a więc kształt toru, okres itp. Potrzebna tu jest tylko znajomość stosowanego układu współrzędnych (np. kartezjański, biegunowy). W ogólnej teorii względności nie dysponujemy tak wygodnymi układami współrzędnych. Aby znaleźć obserwowalne elementy ruchu konieczne tu są dwie rzeczy: znajomość pola metrycznego $g_{\mu\nu}(x)$ oraz linii świata ciał $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$, ewentualnie postaci równań ruchu. Natomiast *nie wystarcza* (poza szczególnymi przypadkami) sama znajomość linii świata czy też równań ruchu. Przez transformację układu współrzędnych można zmieniać postać równań ruchu i kształt funkcji $x^\alpha(\lambda)$, ale oczywiście nie można zmieniać efektów obserwowalnych, takich jak ruch perihelium. W szczególności przez transformację układu można usunąć człon $2\alpha\dot{x}$ z przytoczonych równań ruchu 9. rzędu. Jednak nie oznacza to jeszcze, że ruch opisywany przez te równania nie będzie się różnił od ruchu otrzymywanego w metodzie EIH. Ważne jest to, że pola metryczne będą w obu przypadkach istotnie różne, niesprowadzalne jedno do drugiego przez przekształcenie układu współrzędnych.

W związku z wielością rozwiązań równań Einsteina powstaje potrzeba sformułowania odpowiednich *warunków brzegowych*, analogicznych do warunków Sommerfelda w elektrodynamice. Warunki takie powinny mieć charakter geometryczny, tzn. wyróżniać pewne pola grawitacyjne, ale nie wyróżniać układów współrzędnych. Nie udało się do tej pory takich warunków podać; warunki sformułowane przez F o c k a [13] i później zmodyfikowane [18] wyróżniają pewną klasę układów, mianowicie układy „asymptotycznie harmoniczne", tzn. takie, które w nieskończoności przestrzennej spełniają warunek de Dondera $(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$. Wśród warunków brzegowych znajduje się żądanie, aby spełniające je pola dopuszczały układy współrzędnych, w których $g_{\varrho\sigma}$ różni się od tensora Minkowskiego $\eta_{\varrho\sigma}$ o wielkości rzędu $1/r$. Warunki wypromieniowania posiadają pewne interesujące konsekwencje. Pola, które je spełniają, zachowują się w nieskończoności przestrzennej lokalnie jak fala płaska. W oparciu o warunki wypromieniowania oraz wyróżnione w ich sformułowaniu układy współrzędnych można próbować ujednoznacznić definicję energii i pędu w ogólnej teorii względności [18]. Mówiąc niezbyt ściśle okazuje się, że energia i pęd, obliczone przez całkowanie pseudotensora po nieograniczonej hiperpowierzchni przestrzennej, stanowią wektor względem klasy przekształceń układu zachowujących postać warunków brzegowych w nieskończoności. Mówiąc o nieskończoności mamy tu na myśli obszar położony przestrzennie daleko od rozpatrywanego układu ciał (np. systemu słonecznego), a nie nieskończoność w znaczeniu kosmologicznym.

Dotychczas nie wiadomo, czy oprócz pól statycznych istnieją inne pola spełniające postulowane warunki brzegowe. B e r g m a n n [19] i niektórzy inni fizycy [23] uważają, że nawet zagadnienie dwóch ciał nie posiada rozwiązań galileuszowych w nieskończoności, tzn. rozwiązań spełniających w pewnych układach warunek $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(1/r)$ dla $r \to \infty$. Pewnym argumentem na rzecz takiego poglądu jest pojawianie się wyrazów typu $\log r/r$ w drugim rzędzie aproksymacji względem stałej grawitacyjnej [13], [20].

W elektrodynamice nieciągłości pola lub jego pochodnych rozchodzą się z prędkością światła i mają strukturę geometryczną fali płaskiej. Podobnie jest w teorii grawitacji [21]. Okazuje się, że skoki tensora krzywizny mogą zachodzić w próżni tylko na powierzchniach zerowych i posiadają tę samą strukturę, co płaska fala grawitacyjna. Oprócz związków algebraicznych rządzących skokami tensora Riemanna można wyprowdzić równanie różniczkowe, które opisuje zmiany nieciągłości wzdłuż bicharakterystyk (promieni grawitacyjnych) [22]. Rachunki wykonane w najprostszym przypadku pola Schwarzschilda pokazują, że w odpowiednim układzie współrzędnych skoki tensora krzywizny maleją jak $1/r$ w funkcji odległości r od centrum.

Konkludując, można w następujący sposób scharakteryzować obecny stan zagadnienia promieniowania grawitacyjnego. Wyniki Infelda [6] wskazują na to, że nie można mówić o przenoszeniu energii na odległość przy pomocy promieniowania grawitacyjnego. Nasuwają się poważne wątpliwości, czy pojęcie energii grawitacyjnej ma sens. Z drugiej strony mamy szereg faktów, takich jak istnienie fal grawitacyjnych, występowanie „członów promienistych" w metodzie EIH, możliwość sformułowania w teorii grawitacji warunków brzegowych typu Sommerfelda lub propagacja nieciągłości po charakterystykach. Zjawiska te nie mają odpowiedników w newtonowskiej teorii grawitacji i związane są z hiperbolicznością równań Einsteina. Jeśli nie uważa się przenoszenia energii na odległość za atrybut promieniowania, to można zjawiska te określić mianem promieniowania grawitacyjnego.

Autor pragnie wyrazić gorące podziękowania Profesorowi L. Infeldowi i Docentowi J. Plebańskiemu za zachętę do podjęcia tego tematu oraz za pomoc w czasie jego opracowywania. Pomocy w postaci cennych dyskusji udzielili również Prof. P. G. Bergmann, Prof. H. Bondi, Dr F. A. E. Pirani, Dr I. Robinson i Dr W. Tulczyjew.

Literatura

1. A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch., 154 (1918).
2. H. Weyl., *Raum, Zeit, Materie,* Berlin 1921.
3. A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. A **102,** 269 (1922).
4. A. Einstein i N. Rosen, Journ. Franklin Inst. **223,** 43 (1937).
5. A. Einstein, L. Infeld i B. Hoffmann, Ann. Math. **39,** 65 (1938).
6. L. Infeld, Phys. Rev. **53,** 836 (1938).
7. N. Hu, Proc. Roy. Irish Acad. **51** A, 87 (1947).
8. A. Peres, Nuovo Cimento **11,** 644 (1959).
9. H. Bondi, Nature **179,** 1072 (1957).
10. L. Marder, Proc. Roy. Soc. A **244,** 524 (1958).
11. F. A. E. Pirani, Phys. Rev. **105,** 1089 (1957).
12. A. Lichnerowicz, Comptes Rendus **246,** 893 (1958).
13. W. A. Fock, *Tieorija prostranstwa, wriemieni i tiagotienija,* Moskwa 1955.
14. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5,** 721 (1957).
15. I. Robinson (informacja prywatna).
16. L. Infeld, *Equations of motion and gravitational radiation,* Ann. of. Physics (w druku).
17. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., série des sci. math., astr. et phys., **6,** 627 (1958).
18. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., série des sci. math., astr. et phys., **6,** 407 (1958).

19. P. G. Bergmann (informacja prywatna).
20. W. B. Bonnor, Nature **181**, 1196 (1958) oraz Phil. Trans. Roy. Soc. (w druku).
21. A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 273 (1957).
22. A. Trautman, Comptes Rendus, **246**, 1500 (1958).
23. A. Papapetrou, Ann. Physik (6) **20**, 399 (1957); (7) **2**, 87 (1958).