11.

POSTĘPY FIZYKI — TOM IX — ZESZYT 1 — 1958

Andrzej Trautman i Włodzimierz Tulczyjew
Instytut Fizyki PAN

Grawitacja i niezmienniczość

W autobiografii Einsteina [1], pisanej na kilka lat przed śmiercią, można znaleźć następujące słowa:
„... ogólna teoria względności opiera się na następującym podstawowym stwierdzeniu. Prawa przyrody powinny się wyrażać przy pomocy równań kowariantnych względem grupy ciągłych przekształceń współrzędnych...".

W liście do Infelda, noszącym datę 17.1.1955, pisze Einstein na temat wykładu, który Infeld miał wygłosić w Berlinie dla uczczenia 50-lecia teorii względności [2]:

„Zdaje mi się, że byłoby pięknie, gdyby Pan w swoim kazaniu wyjaśniż, że punkt ciężkości teorii tkwi w ogólnej zasadzie względności. Bo większość współczesnych fizyków jeszcze tego nie zrozumiała".

Jednym z głównych oponentów Einsteina, o których wspomina w tym liście jest Fock. W szeregu artykułów oraz w niedawno wydanej książce [3] przedstawia on, odmienną od ogólnie przyjętej, interpretację teorii Einsteina. Zasadnicze elementy poglądów Focka są następujące: ogólna teoria względności to po prostu relatywistyczna teoria grawitacji oparta na założeniu riemannowskiej struktury czasoprzestrzeni. Nazwa „ogólna teoria względności" jest niewłaściwa, gdyż w teorii grawitacji jest mniej „względności", rozumianej jako wyraz jednorodności czasoprzestrzeni, niż w szczególnej teorii względności. Fock uważa, że ogólna niezmienniczość równań grawitacji, do której Einstein przywiązywał dużą wagę, nie posiada znaczenia fizycznego. To, że w einsteinowskim sformułowaniu teorii grawitacji nie ma uprzywilejowanych układów współrzędnych, Fock poczytuje za wadę tej teorii. Aby temu zaradzić, wprowadza on jako wyróżnione, tzw. układy harmoniczne, mające stanowić uogólnienie układów inercjalnych. Fock odmawia również zasadzie równoważności tego znaczenia, które jej przypisywał Einstein. Według Focka równość masy bezwładnej i ważkiej wyczerpuje treść tej zasady.

Ogólna teoria względności powstała 40 lat temu; od dawna stanowi ona przedmiot zainteresowania tylko bardzo niewielkiej grupy fizyków. Nasuwają się poważne wątpliwości: czy warto się w ogóle zajmować sporami, dotyczącymi interpretacji pewnych pojęć teorii, która jest bardzo odległa od wszelkich zastosowań praktycznych. Wątpliwości te byłyby uzasadnione, gdyby nie szczególne miejsce, jakie zajmuje interesująca nas teoria we współczesnej fizyce. Ogólna teoria względności to równocześnie teoria grawitacji i teoria określająca budowę czasoprzestrzeni, jedyna istniejąca teoria ogólnieniezmiennicza. Jest ona, jak dotąd, jedyną udaną teorią realizującą częściowo piękną ideę geometryzacji fizyki. Równania pola grawitacyjnego są nieliniowe, ale to chyba nie jest jedyną przyczyną tego, że pole to, jak na razie skutecznie opiera się wszelkim próbom kwantowania.

Wszystkie te względy wydają się przemawiać za celowością dokładnego wyjaśnienia podstaw fizycznych ogólnej teorii względności i uzyskania jednoznacznej interpretacji podstawowych jej pojęć. W niniejszym artykule, który należy rozumieć jako głos w dyskusji, postaramy się omówić znaczenie niezmienniczości równań fizyki, rolę zasady równoważności oraz kwestię układów współrzędnych w ogólnej teorii względności. Zagadnienia te odegrały ważną rolę w rozwoju teorii i od samego początku były przedmiotem wielu nieporozumień i polemik.

Równocześnie z powstaniem szczególnej teorii względności oczywistą stała się konieczność zbudowania nowej, relatywistycznej teorii grawitacji, zgodnej z zasadą oddziaływania z bliska, a więc teorii polowej. Wychodząc ze stwierdzonej doświadczalnie równości masy bezwładnej i ważkiej Einstein zauważył, że pola grawitacyjne posiadają wiele cech wspólnych z polami sił pozornych, które powstają przy stosowaniu nieinercjalnych, przyśpieszonych układów odniesienia. Opierając się na tym spostrzeżeniu Einstein wysunął w 1907 r. [4] myśl uogólnienia zasady względności na układy inne niż inercjalne, to znaczy takiego sformułowania praw przyrody, aby nie zmieniały one postaci przy przejściu do dowolnie poruszających się układów odniesienia. Światło niesie energię, a tej z kolei towarzyszy masa; można się więc spodziewać, że promienie świetlne będą, podobnie jak ciała niebieskie, odchylane w polu grawitacyjnym. w takim razie prędkość światła w polu grawitacyjnym nie może być stała. Einstein początkowo próbuje określać statyczne pole grawitacyjne przy pomocy wielkości prędkości światła, utożsamiając ją z potencjałem grawitacyjnym [5]. Dopiero w 1914 r. Einstein i Grossman [6] pokazują, że pole grawitacyjne należy opisywać przy pomocy pola metrycznego $g_{\alpha\beta}$; przy pomocy $g_{\alpha\beta}$ można zapisać równania ruchu, równania Maxwella i prawa zachowania w postaci ogólniekowariantnej. Lata 1914—1915 były poświęcone poszukiwaniu ogólnieniezmienniczych równań pola grawitacyjnego. Jest rzeczą charakterystyczną, że Einstein w pewnym okresie zrezygnował z nakładania na równania pola warunku ogólnej niezmienniczości, a nawet opublikował pracę [7], w której wykazywał, że równania pola grawitacyjnego nie mogą być ogólnie niezmiennicze. Później jednak Einstein powrócił do warunku ogólnej niezmienniczości; opublikowane w ostatecznej postaci w 1916 r. [8] równania pola czyniły zadość temu warunkowi. Dalsze lata przyniosły potwierdzenie doświadczalne teorii, znaleziono różne ścisłe i przybliżone rozwiązania równań pola i badano ich własności, ale sama ogólna teoria względności przetrwała w zasadzie w niezmienionej formie do dziś. Pojawiły się natomiast różne próby podania nowej interpretacji ogólnej teorii względności, rozumianej jako teoria pola grawitacyjnego; wśród nich należy wymienić interpretację Focka oraz „teorię grawitacji w płaskiej przestrzeni" Rosena-Papapetrou. Przez obie te próby przebija stara idea znalezienia „prawdziwego" układu odniesienia. Zdaniem naszym stanowią one krok wstecz w stosunku do teorii Einsteina.

1. Wstęp geometryczny

Zarówno szczególna jak i ogólna teoria względności zajmuje się badaniem fizycznej czasoprzestrzeni. Z matematycznego punktu widzenia obie te teoria są teoriami geometrycznymi i wszystkie pojęcia, którymi operują, mają wyraźną interpretację geometryczną. Zakładając, że geometria różniczkowa jest czytelnikowi znana, przypominamy tutaj pewne pojęcia, które będą przydatne do dalszej dyskusji. Opieramy się głównie na monografii Schoutena [9].

W geometrii różniczkowej mamy do czynienia z dwiema przestrzeniami. Jedną jest przestrzeń geometryczna, której własności badamy, drugą jest przestrzeń arytmetyczna, złożona na przykład w przypadku przestrzeni trójwymiarowej z uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych. Układem współrzędnych nazywamy dowolne jednoznaczne przyporządkowanie punktom przestrzeni geometrycznej punktów przestrzeni arytmetycznej czyli współrzędnych. Zasadnicze znaczenie ma przestrzeń geometryczna, którą w przypadku teorii względności jest czasoprzestrzeń fizyczna. Przestrzeń arytmetyczna odgrywa rolę pomocniczą umożliwiając analityczne traktowanie własności geometrycznych. Przekształceniem układu współrzędnych nazywamy przejście do jednego przyporządkowania punktów przestrzeni arytmetycznej punktom przestrzeni geometrycznej do drugiego takiego przyporządkowania. Przekształcenie układu ma postać jedno-jednoznacznego przekształcenia przestrzeni arytmetycznej na siebie:

$$x'^{\mu} = x^{\mu}(x^{\nu}).$$

Z przekształceniami układu współrzędnych wiąże się pojęcie obiektu geometrycznego. Obiektem geometrycznym w punkcie o współrzędnych x^{ν} nazywamy przyporządkowanie każdemu układowi współrzędnych uporządkowanego zespołu N liczb Φ_Λ $(\Lambda = 1, \ldots, N)$ (nazywanych składowymi obiektu) takie, że przy przejściu od jednego układu do drugiego składowe w nowym układzie Φ'_Λ są funkcjami składowych w starym układzie Φ_Λ oraz funkcji $x'^\mu(x^\nu)$ i ich pochodnych [1]:

$$\Phi'_\Lambda(x'^\mu) = F_\Lambda(\Phi_\Lambda(x^\mu),\, x^\mu,\, x'^\mu(x^\lambda),\, x'^\mu{}_{,\nu}(x^\lambda), \ldots),$$

przy czym funkcja F_Λ jest taka sama dla każdego przejścia. Przykładami obiektów są wektory, tensory, a także symbole Christoffela. Podstawową rolę w geometrii różniczkowej odgrywa charakterystyczna dla danej geometrii grupa dopuszczalnych przekształceń układu współrzędnych. Według Kleina [10] geometria zajmuje się badaniem tych własności figur w przestrzeni geometrycznej, które są niezmiennicze względem grupy przekształceń dopuszczalnych.

Jedną z najprostszych geometrii jest geometria euklidesowa. Grupa przekształceń dopuszczalnych jest ograniczona żądaniem niezmienniczości wyrażenia

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} dx^\alpha dx^\alpha \tag{1}$$

mającego interpretację kwadratu odległości między punktami, których współrzędne różnią się o dx^α. W skład tej grupy wchodzą przekształcenia ortogonalne:

$$x'^\alpha = a^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha,$$

gdzie

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a^\alpha{}_\beta\, a^\alpha{}_\gamma = \delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 \text{ dla } \beta = \gamma, \\ 0 \text{ dla } \beta \neq \gamma. \end{cases}$$

Powtórzenie wskaźników na różnych poziomach oznacza jak zwykle sumowanie. W geometrii euklidesowej współrzędne mają bezpośrednią interpretację geometryczną. Odległość między dwoma punktami mierzona wzdłuż prostej łączącej te punkty jest równa pierwiastkowi z sumy kwadratów różnic współrzędnych. W szczególnym przypadku, jeśli prosta łącząca punkty jest równoległa do jednej z osi współrzędnych, to odległość między punktami jest równa wprost różnicy współrzędnych tych punktów. Zgodnie z programem Kleina geometrycznymi własnościami figur w przestrzeni euklidesowej są te własności, których zapis przy pomocy współrzędnych jest niezmienniczy względem przekształceń ortogonalnych, czyli taki sam we wszystkich układach kartezjańskich. Na przykład prostą nazywamy linę, której przedstawienie parametryczne ma postać:

$$x^\nu = b^\nu t + c^\nu.$$

---

[1] Wskaźnik po przecinku oznacza różniczkowanie, na przykła $\varphi_{,\nu} = \partial\varphi/\partial x^\nu$.

Przy zmianie układu zmieniają się stałe b^ν i c^ν, ale postać pozostaje bez zmiany. Jest to analityczna definicja prostej; można podać także inne, czysto geometryczne definicje. Podobnie definiujemy równoległość prostych, kąt między prostymi i szereg innych pojęć. Geometryczna interpretacja współrzędnych jest wspólną cechą geometrii realizujących program Kleina.

Przekształcenia ortogonalne i układy kartezjańskie są w geometrii euklidesowej wyraźnie wyróżnione; nie znaczy to jednak, że wprowadzenie innych współrzędnych jest w ogóle niemożliwe. Po dokonaniu ogólnego przekształcenia $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, czyli po przejściu do współrzędnych krzywoliniowych, tracimy jednak bezpośrednią interpretację geometryczną współrzędnych. Kwadrat elementu długości ds^2 we współrzędnych krzywoliniowych nie ma już prostej postaci (1) i nie wyraża się przy pomocy samych przyrostów współrzędnych. Przekształcając (1) otrzymujemy

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta .$$

Do określenia odległości dwóch nieskończenie bliskich punktów trzeba mieć oprócz współrzędnych także wartości tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$ Do własności geometrycznych nie można już stosować kryterium niezmienniczości zapisu przy pomocy współrzędnych. Okazuje się jednak, że przy pomocy $g_{\alpha\beta}$ można nadać definicjom własności geometrycznych postać niezmienniczą względem ogólnych przekształceń współrzędnych. Na przykład równanie prostej ma taką samą postać

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} \frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(g_{\delta\beta,\,\gamma} + g_{\gamma\delta,\,\beta} - g_{\beta\gamma,\,\delta})$$

we wszystkich układach krzywoliniowych. Mamy tu do czynienia z pewnym rozszerzeniem programu Kleina (Schouten [9], II, § 2). Pola metryczne $g_{\alpha\beta}$ uzyskane przez wprowadzenie układu krzywoliniowego w przestrzeni euklidesowej mają zawsze szczególną postać:

$$g_{\alpha\beta} = A^\varrho{}_{,\alpha} A^\sigma{}_{,\beta}\, \delta_{\varrho\sigma}\,, \tag{2)}$$

gdzie A^ϱ są funkcjami dowolnymi. Stosując przekształcenie $x'^\mu = A^\mu(x_\nu)$ wracamy do układu kartezjańskiego z $g'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Przestrzeń euklidesową nazywamy inaczej przestrzenią płaską. Miarą krzywizny przestrzeni jest tensor krzywizny:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\delta \end{Bmatrix}_{,\gamma} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}_{,\delta} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \gamma\varepsilon \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta\delta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \delta\varepsilon \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}.$$

Znikanie tensora krzywizny świadczy o płaskości przestrzeni i możności wprowadzenia układów kartezjańskich.

Rozszerzenie programu Kleina umożliwia przejście do przestrzeni riemannowskiej, w której $g_{\alpha\beta}$ nie da się przedstawić w postaci (2) i tensor krzywizny nie znika. Geometria riemannowska zajmuje się badaniem własności wyrażających się przy pomocy współrzędnych i $g_{\alpha\beta}$ w sposób niezmienniczy względem przekształceń ogólnych. Wszystkie pojęcia geometrii Riemanna są uogólnieniem odpowiednich pojęć euklidesowych, a ich definicje mają postać odpowiednich definicji euklidesówych w układach krzywoliniowych. Rozróżnienie przestrzeni geometrycznej i arytmetycznej nabiera w geometrii riemannowskiej szczególnego znaczenia. Podanie współrzędnych punktu nie pozwala jeszcze na geometryczne umiejscowienie tego punktu względem innych figur o znanych współrzędnych. Z kształtu figury w przestrzeni arytmetycznej nie można wnioskować o jej własnościach geometrycznych. Na przykład linia

$$x^{\nu} = b^{\nu}t + c^{\nu}$$

nie ma na ogół nic wspólnego z geodezyjną będącą uogólnieniem prostej. Wszelkie informacje o współrzędnych figur nabierają treści geometrycznej dopiero po podaniu tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$.

Obok przestrzeni euklidesowych rozpatruje się przestrzenie pseudoeuklidesowe z formą metryczną

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{3}$$

gdzie

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \ldots = \eta_{ii} = 1,\ \eta_{i+1\ i+1} = \ldots = \eta_{nn} = -1,$$

a pozostałe składowe znikają. Grupę przekształceń dopuszczalnych tworzą przekształcenia Lorentza

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

$$a^{\mu}{}_{\varkappa} a^{\nu}{}_{\lambda}\, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\varkappa\lambda}.$$

Riemannowskim odpowiednikiem przestrzeni pseudoeuklidesowej jest przestrzeń w której forma metryczna

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} \tag{4}$$

jest nieokreślona.

Jak już wspomnieliśmy, szczególna i ogólna teoria względności mogą być interpretowane jako geometryczne teorie czasoprzestrzeni fizycznej. Wszystkie wielkości fizyczne są w obu tych teoriach obiektami geometrycznymi, a wszystkie równania mają sens geometryczny, czyli są niezmiennicze względem odpowiednich grup przekształceń dopuszczalnych. Szczególna teoria względności przypisuje czasoprzestrzeni metrykę pseudoeuklidesową ($i = 1$, $n = 4$), a przekształcenia dopuszczalne tworzą dziesięcioparametrową grupę Lorentza. ds nosi nazwę różniczki interwału.

Współrzędne są zwykle numerowane od 0 do 3. Zerowa współrzędna ma interpretację czasu, pozostałe (oznaczane wskaźnikami łacińskimi: k, $l = 1, 2, 3$) są współrzędnymi przestrzennymi. Według ogólnej teorii względności czasoprzestrzeń ma strukturę riemannowską, przy czym metryka $g_{\alpha\beta}$ jest uwarunkowana rozkładem materii. Równania są niezmiennicze względem ogólnych przekształceń współrzędnych, czyli ogólnie-niezmiennicze. Współrzędne nie mają bezpośredniej interpretacji fizycznej. Współrzędna zerowa jest zwykle wyróżniona warunkiem Hilberta:

$$g_{00} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g = |g_{\alpha\beta}| < 0$$

i nazywana czasem. Szczególną teorię względności można oczywiście formułować także we współrzędnych krzywoliniowych.

2. Niezmiennicze problemy wariacyjne. Twierdzenie Noether

Wszystkie równania, które będziemy rozpatrywali, nazywając je ogólnie równaniami pola, można wyprowadzić z zasady wariacyjnej. To znaczy, że równania pola:

$$\mathfrak{F}^A(\psi_A, \psi_{A,\mu}, \psi_{A,\mu\nu}, x^\varrho) = 0$$

można przedstawić w postaci równań Eulera-Langrange'a

$$\mathfrak{F}^A = [\mathfrak{L}]^A = \delta W/\delta\psi_A = \partial\mathfrak{L}/\partial\psi_A - (\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_{A,\mu})_{,\mu} = 0 \tag{5}$$

będących warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału

$$W = \int_R \mathfrak{L}(\psi_A, \psi_{A,\nu}, x^\varrho) d_{(4)}x .$$

Rozpatrzmy teraz przekształcenie polegające na przejściu od zmiennych x^ν do x'^ν i od funkcji ψ_A do ψ'_A:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x'^\mu(x^\nu), \\ \psi'_A &= \psi'_A(\psi_B, x^\nu). \end{aligned} \tag{6}$$

Zmiana funkcji ψ_A jest zwykle związana ze zmianą współrzędnych i wynika z własności transformacyjnych ψ_A jako obiektu geometrycznego. Rozpatruje się także transformacje cechowania polegające na zmianie funkcji ψ_A bez zmiany układu współrzędnych. W obu wypadkach ψ_A i ψ'_A opisują ten sam stan fizyczny. Po podstawieniu do działania x^μ i ψ_A wyrażonych przez x'^μ i ψ'_A otrzymamy:

$$W = \int_{R'} \mathfrak{L}'(\psi'_A, \psi'_{A,\mu}, x'^\varrho) d_{(4)}x',$$

gdzie

$$\mathfrak{L}'(\psi'_A,\ \psi'_{A,\mu},\ x'^{\varrho}) = \mathfrak{L}(\psi_A,\ \psi_{A,\mu},\ x^{\varrho})\, D(x)/D(x').$$

Wartość działania nie uległa zmianie przy transformacji. Jeśli więc działanie przyjmowało dla funkcji ψ_A wartość stacjonarną, to przyjmuje ją także dla funkcji ψ'_A odpowiadających ψ_A. Stąd na mocy równań (5) zachodzą równania:

$$\mathfrak{F}'^A(\psi'_A,\ \psi'_{A,\mu},\ \psi'_{A,\mu\nu},\ x'^{\varrho}) = [\mathfrak{L}']^A = 0. \tag{7}$$

Równania te przyjmujemy jako przekształcone równania pola. Równania przekształcone można uzyskać także przez podstawienie x^μ i ψ_A wyrażonych przez x'^μ i ψ'_A wprost do równań (5). Uzyskane w ten sposób równania różniłyby się od równań (7) jedynie nieznikającym czynnikiem. Możemy teraz zdefiniować pojęcia niezmienniczości równań pola. Równania pola są niezmiennicze względem transformacji (6) jeśli $\mathfrak{F}^A$ i $\mathfrak{F}'^A$ są takimi samymi funkcjami swoich argumentów:

$$\mathfrak{F}'^A(\psi_A,\ \psi_{A,\mu},\ \psi_{A,\mu\nu},\ x^{\varrho}) = \mathfrak{F}^A(\psi_A,\ \psi_{A,\mu},\ \psi_{A,\mu\nu},\ x^{\varrho})$$

dla dowolnego zespołu funkcji ψ_A i w dowolnym punkcie x^{ϱ}. Niezmienniczość równań względem pewnych grup przekształceń ma doniosłe znaczenie fizyczne. Niezmienniczymi problemami wariacyjnymi zajmowała się Noether [11], podane tutaj ujęcie jest najbliższe pracy Hilla [12]. Przy badaniu konsekwencji niezmienniczości równań wystarczy ograniczyć się do przekształceń infinitesimalnych:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \\ \psi'_A(x'^{\varrho}) &= \psi_A(x^{\varrho}) + \delta\psi_A. \end{aligned} \tag{8}$$

Wariacja $\delta\psi_A$ jest przyrostem wartości funkcji w pewnym punkcie geometrycznym. Wprowadzimy dodatkowo wariację

$$\delta^*\psi_A = \psi'_A(x^{\varrho}) - \psi_A(x^{\varrho}),$$

która mówi o zmianie postaci ψ_A. Między tymi wariacjami zachodzi związek:

$$\delta\psi_A = \delta^*\psi_A + \psi_{A,\nu}\,\delta x^\nu$$

Wariacja δ^* zwana substancjalną jest przemienna z różniczkowaniem

$$\delta^*(\psi_{A,\nu}) = (\delta^*\psi_A)_{,\nu}.$$

Dla dowolnej funkcji $\Phi(\psi_A, \psi_{A,\mu}, \ldots, x^{\varrho})$ można wprowadzić także dwa rodzaje wariacji

$$\delta\Phi = \Phi'(\psi'_A(x'^{\varrho}), \psi'_{A\mu}(x'^{\varrho}), \ldots, x'^{\delta}) - \Phi(\psi_A(x^{\varrho}), \psi_{A\mu}(x^{\varrho}), \ldots, x^{\varrho}),$$

$$\delta\bar{\Phi} = \Phi'(\psi_A(x^{\varrho}), \psi_{A,\mu}(x^{\varrho}), \ldots, x^{\varrho}) - \Phi(\psi_A(x^{\varrho}), \psi_{A,\mu}(x^{\varrho}), \ldots, x^{\varrho}).$$

Wariacja $\bar{\delta}$ jest przemienna z różniczkowaniem, na przykład:

$$\bar{\delta}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_A} = \frac{\partial}{\partial\psi_A}\,\bar{\delta}\Phi$$

W przypadku $\Phi = \mathfrak{L}$ mamy:

$$\delta\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(D(x)/D(x') - 1) = -\,\mathfrak{L}(\delta x^{\nu})_{,\nu}. \tag{9}$$

Niezmienniczość równań pola wyrazi się warunkiem $\bar{\delta}\mathfrak{F}^A = \bar{\delta}[\mathfrak{L}]^A = 0$. Stąd na mocy przemienności $\bar{\delta}$ z różniczkowaniem otrzymamy $[\bar{\delta}\mathfrak{L}]^A = 0$ czyli $\bar{\delta}\mathfrak{L} = Q^{\varrho}{}_{,\varrho}$, gdzie Q^{ϱ} są funkcjami dowolnymi. W rozpatrywanych przez nas przypadkach będzie zawsze zachodziło

$$\bar{\delta}\mathfrak{L} = 0. \tag{10}$$

Uwzględniając (9) i (10) oraz związek między wariacjami otrzymamy:

$$\bar{\delta}\mathfrak{L} = (\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_A)\,\delta^*\psi_A + (\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_{A,\mu})\,\delta^*\psi_{A,\mu} + \mathfrak{L}_{,\mu}\delta x^{\mu} = -\,\mathfrak{L}\,(\delta x^{\nu})_{,\nu},$$

a stąd

$$[\mathfrak{L}]^A\,\delta^*\psi_A + \Big((\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_{A,\nu})\,\delta\psi_A + (\mathfrak{L}\delta^{\nu}_{\mu} - \psi_{A,\mu}\,\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_{A,\nu})\,\delta x^{\mu}\Big)_{,\nu} \equiv 0. \tag{11}$$

Jest to podstawowy związek przy badaniu niezmienniczych problemów wariacyjnych.

Przypuśćmy, że przekształcenia (6) tworzą ϱ-parametrową grupę G_{ϱ}

$$\begin{aligned} \delta x^{\mu} &= \sum_{k=1}^{\varrho} \varepsilon_k\, a_k^{\mu}\,(x^{\varkappa}), \\ \delta\psi_A &= \sum_{k=1}^{\varrho} \varepsilon_k\, b_{kA}\,(\psi_B, x^{\varkappa}). \end{aligned} \tag{12}$$

Wstawiając (12) do tożsamości (11) i korzystając z równań pola otrzymamy ϱ różniczkowych zasad zachowania:

$$[(\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_A)\,b_{kA} + (\mathfrak{L}\delta^{\nu}_{\mu} - \psi_{A,\mu}\,\partial\mathfrak{L}/\partial\psi_{A,\nu})\,a_k^{\mu}]_{,\nu} = 0,\ k=1,\ldots,\varrho.$$

Inne związki otrzymamy w przypadku, kiedy transformacje (6) zależą od ϱ funkcji dowolnych:

$$\begin{aligned} \delta x^{\mu} &= \sum_{k=1}^{\varrho} a_k^{\mu}\,p_k\,(x^{\varkappa}), \\ \delta^*\psi_A &= \sum_{k=1}^{\varrho}\Big(b_{kA}\,p_k\,(x^{\varkappa}) + b_{kA}^{\mu}\,p_{k,\mu}\,(x^{\varkappa}) + b_{kA}^{\mu\nu}\,p_{k,\mu\nu}\,(x^{\varkappa}) + \ldots\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

Bierzemy p_k znikające wraz z pochodnymi na brzegu pewnego obszaru R. Całkowanie tożsamości (11) po podstawieniu (13) daje:

$$\int\limits_R [\mathfrak{L}]^A \delta^* \psi_A d_{(4)} x = 0.$$

Całkując przez części i korzystając z dowolności p_k wewnątrz obszaru R otrzymujemy ϱ tożsamości

$$[\mathfrak{L}]^A b_{kA} - [\mathfrak{L}]^A{}_{,\mu} b^{\mu}_{kA} + [\mathfrak{L}]^A{}_{,\mu\nu} b^{\mu\nu}_{kA} - \ldots \equiv 0,$$

zachodzących niezależnie od spełnienia równań pola. Tożsamości tego rodzaju odgrywają poważną rolę w ogólnej teorii względności.

Równania wynikające z zasady wariacyjnej mają taką samą postać równań Eulera-Langrange'a a w każdym układzie. Na przykład równania Langrange'a II-go rodzaju w mechanice punktu materialnego mają w każdym układzie krzywoliniowym postać $d(\partial L/\partial q_l)/dt = \partial L/\partial q_l = 0$, przy czym lagrangian jest w każdym układzie inną funkcją współrzędnych. Często mówi się w tym przypadku o niezmienniczości równań Eulera-Langrange'a. Niezmienniczość ta nie ma nic wspólnego z niezmienniczością w sensie twierdzenia Noether i nie pociąga żadnych konsekwencji fizycznych.

3. Zasada równoważności

U podstaw ogólnej teorii względności Einstein kładł [13] następujące trzy zasady: zasadę równoważności, ogólnej niezmienniczości oraz hipotezę Macha. Omówmy obecnie znaczenie fizyczne i rolę, którą odegrała pierwsza spośród tych zasad przy powstawaniu einsteinowskiej teorii grawitacji.

Przypomnijmy najpierw, w nieco uproszczony sposób, rozumowanie, które doprowadziło do sformułowania szczególnej teorii względności. Doświadczenie wykazuje, że istnieją wyróżnione układy współrzędnych (inercjalne), w których prawa mechaniki posiadają najprostszą postać. Układ poruszający się względem układu inercjalnego ruchem jednostajnym postępowym jest też inercjalny („względność" ruchu jednostajnego). Matematycznym wyrazem tych doświadczalnych faktów jest niezmienniczość równań mechaniki newtonowskiej względem transformacji Galileusza. Szczególna zasada względności polega na stwierdzeniu, że wszystkie zjawiska fizyczne (nie tylko mechaniczne) opisywane są przy pomocy praw, mających tę samą postać w różnych układach inercjalnych. Stosując tę zasadę do równań Maxwella dochodzimy do wzorów transformacyjnych Lorentza.

W mechanice Newtona oprócz względności ruchów jednostajnych występuje jeszcze inny, ciekawy i nie tłumaczony przez tę teorię, a stwierdzony doświadczalnie fakt: masa bezwładna jest równa masie grawitacyjnej. Równania ruchu ciała o masie bezwładnej m w polu grawitacyjnym o potencjale φ można według fizyki przedrelatywistycznej zapisać w postaci:

$$m\, d^2 x^k/dt^2 = -m' \varphi_{,k}.$$

A priori nie ma żadnych powodów, ażeby masa grawitacyjna m' miała być zawsze równa m; wydaje się, że m' jest „nabojem grawitacyjnym", analogicznym do ładunku elektrycznego. Doświadczenia prowadzone z dużą dokładnością (E ö t v ö s) wskazują jednak na to, że $m = m'$. Występowanie dwóch fizycznie różnych definicji tej samej (liczbowo) wielkości jest, jak to niejednokrotnie podkreślał E i n s t e i n, wysoce niezadowalające z logicznego punktu widzenia. Wypływa stąd następujący wniosek: nowa, relatywistyczna teoria grawitacji powinna tłumaczyć równość $m = m'$, to znaczy w równaniach ruchu tej teorii może występować tylko jedna wielkość charakteryzująca masę.

Równość masy bezwładnej i ważkiej powoduje, że wszystkie ciała, którym nadano te same prędkości początkowe, poruszają się w polu grawitacyjnym tak samo. Zupełnie podobnie zachowują się według mechaniki newtonowskiej ciała odniesione względem układów nieinercjalnych; w takich układach równania ruchu mają postać

$$m\, d^2x^k/dt^2 = ma^k,$$

gdzie a^k oznacza przyśpieszenie „sił pozornych" (przyśpieszenie Coriolisa, odśrodkowe). Konsekwencją tego jest lokalna nierozróżnialność pól grawitacyjnych i pól przyśpieszeń w mechanice newtonowskiej: obserwator zamknięty w niewielkim pomieszczeniu (na przykład w windzie) nie potrafi przy pomocy doświadczeń mechanicznych odpowiedzieć na pytanie, czy siły, które obserwuje, są wywołane przyciąganiem powszechnym (na przykład Ziemi), czy ruchem przyśpieszonym windy. Wiadomo, że w swobodnie spadającej windzie ciała „nie ważą". Stwierdzony w szczególnej teorii względności związek między masą i energią oraz fakt, że fale świetlne niosą energię nasunął E i n s t e i n o w i myśl, że nierozróżnialność pól grawitacyjnych i pól sił pozornych dotyczy również zjawisk niemechanicznych, a więc na przykład elektromagnetycznych. W ten sposób dochodzimy do *zasady równoważności*, którą można by sformułować następująco: prawa fizyki dają się zapisać w tej samej postaci wtedy, gdy występuje pole grawitacyjne i wtedy, gdy stosujemy nieinercjalne układy odniesienia. Zwykle wypowiada się to prościej, ale niezbyt ściśle: nieinercjalny układ odniesienia jest równoważny pewnemu polu grawitacyjnemu.

Widoczna jest analogia między szczególną zasadą względności i zasadą równoważności: obie uogólniają pewne własności równań mechaniki newtonowskiej na całą fizykę. Obie mają charakter fizyczny w tym sensie, że mogą być przez doświadczenie potwierdzone lub obalone. Einstein doszedł do zasady równoważności opierając się na równości masy bezwładnej i ważkiej, ale równość ta nie wyczerpuje treści fizycznej tej zasady. Posiada ona duże znaczenie heurystyczne: pozwala jakościowo przewidzieć przebieg zjawisk fizycznych w polu grawitacyjnym. W oparciu o zasadę równoważności Einstein przewidział zjawisko „przesunięcia ku czerwieni" prążków widma i zjawisko ugięcia się promieni świetlnych w polu grawitacyjnym; nie znając jeszcze postaci równań pola obliczył w 1911 r. [14] wielkość przesunięcia i ugięcia. W kilka lat później ścisła teoria potwierdziła przewidywania Einsteina.

Konsekwencją szczególnej teorii względności i równań Maxwella jest prawo prostoliniowego rozchodzenia się światła. Pole grawitacyjne zakrzywia promienie świetlne — zatem w takim polu nie mogą być słuszne prawa szczególnej teorii względności. Budując relatywistyczną teorię grawitacji musimy więc zrezygnować z założenia, że czasoprzestrzeń ma strukturę pseudoeuklidesową i przyjąć strukturę przynajmniej riemannowską. A stąd już wynika, że musimy zrezygnować z wyróżnionej roli transformacji Lorentza, związanych z układami inercjalnymi, które po prostu nie istnieją w czasoprzestrzeni z polem grawitacyjnym. Konieczność rozszerzenia dopuszczalnej grupy transformacji układu odniesienia ma więc swoje źródło w zasadzie równoważności.

Opierając się na zasadzie równoważności łatwo określić, jaki zespół funkcji powinien opisywać pole grawitacyjne, to znaczy jakie jest relatywistyczne uogólnienie newtonowskiego potencjału φ. W szczególnej teorii względności w dowolnym, nieinercjalnym, krzywoliniowym układzie współrzędnych kwadrat różniczki interwału ma postać (4). Dokonując transformacji $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$, która prowadzi od galileuszowej postaci interwału $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}$ $(\eta_{00} = 1, \eta_{0k} = 0, \eta_{ik} = -\delta_{ik})$ do postaci ogólnej (4), możemy każde równanie fizyki, niezmiennicze względem przekształceń Lorentza, zapisać w dowolnym, nieinercjalnym układzie współrzędnych. Taka operacja ma charakter czysto rachunkowy, to znaczy nie wymaga żadnych nowych założeń fizycznych. I tak na przykład równania Maxwella zostały przez Kottlera zapisane w dowolnych, krzywoliniowych współrzędnych jeszcze w 1912 r. [15], przed powstaniem ogólnej teorii względności. Oprócz zmiennych charakteryzujących stan fizyczny materii (takich jak potencjały pola elektromagnetycznego i współrzędne cząstek) przetransformowane równania będą zawierały funkcje $g_{\alpha\beta}$ i ich pochodne. Posługując się językiem fizyki newtonowskiej można by powiedzieć, że $g_{\alpha\beta}$ opisuje tutaj wpływ „sił pozornych" na stan układu. Zasada równoważności żąda, aby równania fizyki opisujące zjawiska w polu grawitacyjnym dały się zapisać w tej samej postaci, co równania w układach nieinercjalnych. Zatem funkcje $g_{\alpha\beta}$ opisują również pole grawitacyjne [6].

Ażeby pokazać na przykładzie, w jaki sposób można stosować zasadę równoważności, rozpatrzmy równania ruchu swobodnej cząstki próbnej. W szczególnej teorii względności, w układach inercjalnych, mają one postać

$$m\ d^2 x^\alpha / ds^2 = 0,$$

gdzie m oznacza masę spoczynkową. Masa ta jest tutaj nieistotna; piszemy ją dlatego, aby móc porównać równania ruchu w ogólnej teorii względności z równaniami newtonowskimi (14). Wielkość masy odgrywa rolę, gdy uwzględniamy inne siły (np. Lorentza), działające na ciało. Te same (co do treści) równania, zapisane w dowolnym układzie współrzędnych, mają postać:

$$m\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dx^\beta}{ds} \cdot \frac{dx^\gamma}{ds}\right) = 0. \tag{15}$$

Na mocy zasady równoważności przyjmujemy, że ten sam kształt mają równania ruchu w polu grawitacyjnym (również w dowolnym układzie współrzędnych). Jeśli ograniczymy się do powolnych ruchów i słabych, powoli zmieniających się pól grawitacyjnych, powinniśmy z (15) otrzymać newtonowskie równania ruchu (14). Rzeczywiście, jeśli

$$|dx^k/ds| \ll 1,\ ds \approx dx^0 = dt,\ g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}\ \text{i}\ |g_{\mu\nu,0}| \ll |g_{\mu\nu},_k,$$

to $$m\left(\frac{d^2x^k}{ds^2} + \left\{ {k \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{ds^\gamma}{ds}\right) \approx m\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{m}{2} g_{00},_k = 0,$$

czyli

$$m\ d^2 x^k/dt^2 = -\frac{1}{2} m\, g_{00,k}, \tag{16}$$

a więc otrzymujemy równania postaci (14), przy czym $g_{00} \approx 1 + 2\varphi$. Przyglądając się równaniom (15) lub (16) i porównując je z (14) widzimy, że ogólna teoria względności pozwala na wyeliminowanie problemu równości masy bezwładnej i ważkiej, przynajmniej dla cząstek próbnych.

Zasada równoważności, szczególnie w uproszczonej wersji „pole grawitacyjne jest równoważne polu przyśpieszeń", bywa czasami atakowana [3]. F o c k słusznie podkreśla, że nierozróżnialność pola grawitacyjnego od pola przyśpieszeń ma charakter czysto lokalny; trzeba tylko dodać, że

Einstein zdawał sobie z tego sprawę [16]. Obserwatorzy znajdujący się w dużej, swobodnie spadającej na Ziemię windzie zauważą różnicę między zachowaniem się ciał w okolicy środka windy i w pobliżu jej bocznych ścian. Przy pomocy następującego rozumowania można zilustrować, na czym polega lokalność równoważności pól grawitacyjnych i pól przyśpieszeń. Wyobraźmy sobie swobodnie spadającego obserwatora, który wzdłuż swojej linii świata mierzy składowe tensora metrycznego i ich pochodne. Dopóki zna on jedynie wartości $g_{\mu\nu}(s)$ i $g_{\mu\nu,\varrho}(s)$, nie potrafi powiedzieć, czy znajduje się w płaskiej czasoprzestrzeni, czy też w windzie spadającej swobodnie w polu grawitacyjnym (przypadek „małej windy"). Jeśli winda jest na tyle duża, że obserwatorowi uda się zmierzyć również drugie pochodne tensora metrycznego, będzie mógł on obliczyć tensor krzywizny i przekonać się, czy nie grozi mu śmierć przy rozbiciu windy o Ziemię. Innymi słowami: „prawdziwe" pola grawitacyjne i „pozorne" pola przyśpieszeń są nierozróżnialne wtedy, gdy badane zjawiska wymagają do swojego opisu jedynie wartości $g_{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu,\varrho}$ wzdłuż pewnej linii świata (np. ruch cząstki swobodnej). Wiąże się to z tym, że w przestrzeni Riemanna zawsze można wybrać taki układ współrzędnych, w którym tensor metryczny ma postać galileuszową wzdłuż zadanej linii świata, a $g_{\mu\nu,\varrho} = 0$ wzdłuż tej linii (współrzędne geodezyjne). Aby odpowiedzieć na pytanie, czy w danym obszarze występuje „prawdziwe" pole grawitacyjne, wystarczy obliczyć tensor krzywizny. Jeśli znika on w tym obszarze, to pole jest „pozorne" w tym sensie, że można, obierając inercjalny układ odniesienia, uzyskać $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

4. Zasada ogólnej niezmienniczości

Inną zasadę, która odegrała ważną rolę w kształtowaniu się ogólnej teorii względności, jest zasada ogólnej niezmienniczości równań pola. Zasada ta dotyczy przede wszystkim równań pola grawitacyjnego, ponieważ niezmienniczość równań innych pól wynika już z zasady równoważności. Większość fizyków przyjmuje zasadę ogólnej niezmienniczości jako część składową ogólnej teorii względności, różnice zdań dotyczą jedynie interpretacji tej zasady. Tak na przykład Fock przypisuje zasadzie niezmienniczości jedynie heurystyczne znaczenie polegające na wyróżnianiu równań Einsteina spośród wielu możliwych niekoniecznie niezmienniczych równań. Co się tyczy równań pól fizycznych, to Fock uważa, że niezmienniczość tych równań nie pociąga żadnych fizycznych konsekwencji. Zanim przystąpimy do właściwego tematu, rozpatrzmy najpierw konsekwencje niezmienniczości równań pola w szczególnej teorii względności.

Równania pól fizycznych w szczególnej teorii względności wyprowadzamy w układach galileuszowskich z zasady wariacyjnej:

$$\delta W_f = \delta \int \mathfrak{L}_f (\psi_A, \psi_{A,\mu}, \eta_{\mu\nu})\, d_{(4)} x = 0. \tag{17}$$

Przechodząc do układów dowolnych otrzymamy zasadę:

$$\delta W_f = \delta \int \mathfrak{L}\, (\psi_A, \psi_{A;\mu}, g_{\mu\nu})\, d_{(4)} x = 0, \tag{18}$$

gdzie $\mathfrak{L}_f = \sqrt{-g}\, L_f$, a średnik oznacza różniczkowanie kowariantne, Z pierwszej zasady wynikają równania

$$F^A (\psi_A, \psi_{A;\mu}, \psi_{A,\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) = \frac{\partial L_f}{\partial \psi_A} - \left(\frac{\partial L_f}{\partial \psi_{A,\mu}} \right)_{,\mu} = 0 \tag{19}$$

niezmiennicze względem grupy Lorentza. Z drugiej — ogólnieniezmiennicze równania:

$$F^A(\psi_A, \psi_{A;\mu}, \psi_{A;\mu\nu}, g_{\mu\nu}) = \frac{\partial L_f}{\partial \psi_A} - \left(\frac{\partial L_f}{\partial \psi_{A;\mu}} \right)_{;\mu} = 0. \tag{20}$$

Ogólna niezmienniczość równań (20) wynika z niezmienniczości równań (19) i odwrotnie, ponieważ funkcja F^A jest w obu wypadkach ta sama. Istnieje jednak pewna różnica między niezmienniczością równań (19) i (20). Równania (19) zależą jedynie od funkcji ψ_A i pochodnych, zależność od $\eta_{\mu\nu}$ jest nieistotna, ponieważ przy przekształceniach Lorentza $\eta_{\mu\nu}$ nie ulega zmianie. Ogólną niezmienniczość równań (20) uzyskujemy kosztem wprowadzenia dodatkowych wielkości $g_{\alpha\beta}$. Infinitesimalne przekształcenie Lorentza ma postać:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \tag{21}$$

gdzie $$\varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\varrho}\, \varepsilon^\varrho{}_\nu = - \varepsilon_{\nu\mu}\,.$$

Wariację pola ψ_A można ogólnie zapisać w postaci

$$\delta \psi_A = F_{A\mu}{}^{B\nu}\, \psi_B\, \varepsilon^\mu{}_\nu\,.$$

Wielkości $F_{A\mu}{}^{B\nu}$ charakteryzują ψ_A jako obiekt geometryczny. Wstawiając (21) i (22) do tożsamości (11) otrzymujemy natychmiast dziesięć niezależnych różniczkowych zasad zachowania

$$(L_f \delta^\nu_\mu - \psi_{A,\mu}\, \partial L_f / \partial \psi_{A,\nu})_{,\nu} = - t_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0,$$

$$(F_{A[\lambda}{}^B{}_{\mu]}\, \psi_B\, \partial L_f / \partial \psi_{A,\nu} + x_{[\lambda}\, t_{\mu]}{}^\nu) = j_{\lambda\mu}{}^\nu{}_{,\nu} = 0\,,$$

zachodzących na mocy równań pola. Są to zasady zachowania energii, pędu, momentu pędu i środka bezwładności. $t_\mu{}^\nu$ jest kanonicznym tensorem energii-pędu. Zasady te prowadzą w znany sposób do zasad całkowych. Dodając do $t_\mu{}^\nu$ i $j_{\lambda\mu}{}^\nu$ tensory, których diwergencja znika tożsamościowo, zapisujemy zasady różniczkowe w postaci [17], [18]:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0\,, \qquad (x^{[\lambda} T^{\mu]\nu})_{,\nu} = 0\,, \tag{23}$$

gdzie $T^{\mu\nu}$ jest symetrycznym tensorem energii-pędu. Z zasad tych tylko cztery pierwsze są niezależne, pozostałe wynikają z nich na mocy symetrii $T^{\mu\nu}$. Dokonajmy teraz infinitesimalnego przekształcenia

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\varrho)$$

gdzie ξ^μ są dowolnymi funkcjami znikającymi wraz z pochodnymi na brzegu obszaru R. Z niezmienniczości działania W_f wynika:

$$\int\limits_R \left[\frac{\delta W_f}{\delta g_{\alpha\beta}}\,\delta^* g_{\alpha\beta} + \frac{\delta W_f}{\delta \psi_A}\,\delta^*\psi_A\right] d_{(4)}x \equiv 0\,,$$

gdzie $\delta^* g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\,\xi^\gamma{}_{;\beta} + g_{\beta\gamma}\,\xi^\gamma{}_{;\alpha}$. Zakładając spełnienie równań pola

i wprowadzając oznaczenie $2\,\delta W_f/\delta g_{\alpha\beta} = \mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ otrzymamy:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_R \mathfrak{T}_{\alpha\beta}\,(\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha})\,d_{(4)}x = 0\,,$$

a stąd

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0\,. \tag{24}$$

W układzie galileuszowskim $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ przechodzi w zwykły symetryczny tensor energii-pędu, a (24) przechodzi w (23). Jak należało oczekiwać konsekwencje ogólnej niezmienniczości równań (20) są identyczne z konsekwencjami niezmienniczości równań (19) względem przekształceń Lorentza.

Przejdźmy teraz do ogólnej teorii względności. Równania grawitacyjne i równania pól fizycznych w ogólnej teorii względności otrzymujemy z zasady wariacyjnej

$$\delta W = \delta W_g + \delta W_f = 0\,,$$

gdzie

$$W_g = \int \mathfrak{L}_g(g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\gamma}, g_{\alpha\beta,\gamma\delta})\,d_{(4)}x$$

jest działaniem grawitacyjnym, a

$$W_f = \int \mathfrak{L}_f(\psi_A, \psi_{A;\mu}, g_{\mu\nu})\,d_{(4)}x$$

działaniem pól fizycznych. Zgodnie z zasadą równoważności, działanie pól fizycznych jest identyczne z występującym w (18). Wprowadzając oznaczenie $16\pi\, \delta W_g / \delta g_{\alpha\beta} = \mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ możemy zapisać pełny układ równań pola w postaci:

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -8\pi\, \mathfrak{T}^{\alpha\beta}, \tag{25}$$

$$\mathfrak{F}^{A} = 0. \tag{26}$$

Z niezmienniczości równań (26) wynikają podobnie jak poprzednio różniczkowe zasady zachowania (24). Zasady te nie prowadzą na ogół do żadnych całkowych zasad zachowania, nie oznacza to jednak, że nie mają znaczenia fizycznego. Równania (24) dostarczają informacji o ruchu materii, nawet jeśli równania (26) nie są znane. Z równań tych można wyprowadzić równania ruchu cząstek próbnych [19], a także ciał ciężkich [20], [21]. Znacznie poważniejsze wnioski wynikają z niezmienniczości rówań pola grawitacyjnego. Najprostszym ogólnie niezmienniczym langrangianem grawitacyjnym jest $\mathfrak{L}_g = -(1/16\pi)\mathfrak{R}$, $(R = R^{\alpha}{}_{\alpha},\ R_{\alpha\beta} = R^{\nu}{}_{\alpha\beta\nu})$, $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ jest w tym przypadku gęstością tensora Einsteina $\mathfrak{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\mathfrak{R}$, a równania (25) są równaniami Einsteina. Już w tym najprostszym przypadku równania pola grawitacyjnego są nieliniowe. Nieliniowość równań jest pierwszą niezbyt wygodną konsekwencją ogólnej niezmienniczości. Jako równania pola grawitacyjnego przyjmuje się zawsze równania Einsteina, rozpatrujemy przypadek ogólny jedynie w celu podkreślenia, że konsekwencje ogólnej niezmienniczości nie są związane ze szczególną postacią równań. Z niezmienniczości działania W_g otrzymujemy metodą Noether tożsamości:

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{27}$$

zachodzące niezależnie od spełnienia równań (25). W przypadku równań Einsteina tożsamości (27) są tożsamościami Bianchi, których słuszność łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Istnienie tożsamości (27) narzuca na gęstość energii pędu $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ warunki $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Są to warunki całkowalności równań pola. Te same warunki otrzymaliśmy przedtem z niezmienniczości równań pól fizycznych. Ogólna niezmienniczość równań pól fizycznych jest więc warunkiem dostatecznym zgodności tych równań z niezmienniczymi równaniami grawitacyjnymi. Równania $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, a wraz z nimi równania ruchu, wynikają teraz z równań pola grawitacyjnego. Równania ruchu ciał można także wyprowadzić z równań grawitacyjnych dla próżni ($\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0$) traktując ciała jako osobliwości pola [22]. Ogólna teoria względności jest jedyną teorią, w której równania ruchu nie muszą i nie mogą być zapostulowane oddzielnie, ponieważ wynikają z równań pola. Same równania pola nie wyznaczają metryki świata w sposób jednoznaczny. Trzeba podać jeszcze odpowiednie warunki graniczne. Problem ten, a szczególnie problem warunków w nieskończoności, napotyka na poważne trudności związane także z ogólną niezmienniczością. Nie znaleziono dotychczas ogólnie niezmienniczych i fizycznie uzasadnionych warunków w nieskończoności zapewniających fizyczną jednoznaczność rozwiązań równań Einsteina. Trudność ta wiąże się bezpośrednio z zagadnieniem promieniowania grawitacyjnego, które nie znalazło dotychczas zadowalającego rozwiązania. Trudności te wykorzystuje Fock jako jeden z argumentów za wyróżnioną rolą układu harmonicznego, w którym można uzyskać jednoznaczność rozwiązań nakładając w nieskończoności warunki wypromieniowania analogiczne do stosowanych w elektrodynamice. Z punktu widzenia ogólnej niezmienniczości rozwiązanie takie jest nie do przyjęcia. Aby uzasadnić przyjmowane przez Focka warunki wypromieniowania, należałoby podać jakieś warunki fizyczne nie związane z żadnym układem, które w układzie harmonicznym redukowałyby się do warunków Focka. Rozwiązując równania Einsteina często korzystamy z warunków ustalających układ współrzędnych. Warunek harmoniczności bywa najczęściej stosowany jako jeden z najwygodniejszych. Warunek harmoniczności odgrywa w ogólnej teorii względności podobną rolę jak warunek Lorentza w elektrodynamice i podobnie jak warunek Lorentza jest pozbawiony znaczenia fizycznego. Gdyby istniały fizyczne kryteria wyróżniające układ harmoniczny lub jakikolwiek inny układ, nie byłoby powodu, aby równania pola grawitacyjnego miały być ogólnie niezmiennicze, tym bardziej że niezmienniczość równań pociąga poważne trudności. Brak fizycznych kryteriów wyboru układu jest podstawą ogólnej niezmienniczości. Wiele miejsca w literaturze zajmuje problem zależności równań ruchu układu ciał od układu współrzędnych. Chodzi tu o równania, z których wyeliminowano pole grawitacyjne przez podstawienie rozwiązań równań Einsteina. Postać tych równań, w których występują już tylko współrzędne ciał, zależy oczywiście od układu. Niektórzy fizycy, jak na przykład Papapetrou [21] i Haywood [23], wiążą z tym faktem nadzieje na doświadczalne wyróżnienie pewnych układów. Naszym zdaniem cały problem polega na zasadniczym nieporozumieniu. Niezależnie od zasady ogólnej niezmienniczości wyniki obserwacji są zawsze niezmiennikami. Zależność tych wyników układu jest nieomylnym sygnałem błędu w obliczeniach. W tym wypadku błąd polega na utożsamianiu ruchu ciał względem układu, czyli ruchu w przestrzeni arytmetycznej, z ruchem obserwowanym za pośrednictwem promieni świetlnych. W celu powiązania ruchu względem układu z ruchem obserwowanym należy zbadać bieg promieni świetlnych między ciałami i obserwatorem. Zmiany układu wpływają jednocześnie na ruch ciał i na bieg promieni (w przestrzeni arytmetycznej) w ten sposób, że przewidywany wynik obserwacji nie ulega zmianie. Właściwe naświetlenie tego problemu zostało podane w pracy Infelda i Scheideggera [24].

5. Rola układu odniesienia. Wyróżnione układy współrzędnych

Jak już powiedzieliśmy, w teorii grawitacji na ogół musimy a w szczególnej teorii względności możemy posługiwać się dowolnymi współrzędnymi krzywoliniowymi. Współrzędne te nie posiadają znaczenia fizycznego (geometrycznego), to znaczy nie stanowią bezpośrednio miary długości odcinków przestrzennych ani odstępów czasowych. Znając same współrzędne dwóch zdarzeń nie można nic powiedzieć o interwale między nimi; do tego potrzebna jest znajomość pola metrycznego. Inaczej jest w układach galileuszowych szczególnej teorii względności — różnice współrzędnych posiadają tutaj geometryczne znaczenie odległości i przedziałów czasu, mierzonych przy pomocy sztywnych prętów i zegarów spoczywających w danym układzie.

Geometryczna interpretowalność współrzędnych jest niewątpliwie zaletą szczególnej teorii względności; nasuwa się więc pytanie, czy takich wyróżnionych współrzędnych nie można wprowadzić w dowolnej czasoprzestrzeni, a jeśli nie, to co o tym decyduje.

Zagadnienie wyboru odpowiednich współrzędnych jest dobrze znane każdemu fizykowi; kieruje on tu się symetrią badanego układu. Na przykład zagadnienie jednego ciała najwygodniej rozwiązuje się we współrzędnych kulistych, a efekt Starka — w parabolicznych. Innego rodzaju analogii dostarcza nam przykład pola elektrostatycznego. Pole to zwykle opisuje się przy pomocy jednej funkcji skalarnej $\varphi(x^k)$, posiadającej znaną interpretację energetyczną. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie opisywaniu tego pola przy pomocy pełnego czteropotencjału: $A_0'(x^\nu) = \varphi(x^k) + \chi_{,0}$, $A_k' = \chi_{,k}$. Tracimy jednak w ten sposób bezpośrednią interpretację fizyczną potencjału skalarnego. Istnienie wyróżnionego potencjału w przypadku pola elektrostatycznego jest związane z jego niezmienniczością (symetrią) względem przesunięć wzdłuż osi czasu. Można się więc spodziewać, że istnienie wyróżnionych układów współrzędnych, a co za tym idzie wyróżnionej grupy przekształceń współrzędnych jest związane z symetrią danej czasoprzestrzeni.

Aby wyrobić sobie intuicję na czym taka symetria polega, porównajmy następujące trzy dwuwymiarowe przestrzenie riemannowskie: elipsoidę różnoosiową, elipsoidę obrotową i kulę. Najbardziej symetryczna (jednorodna) jest kula: dopuszcza ona trójparametrową grupę obrotów; wszystkie punkty powierzchni kuli są jednakowo uprzywilejowane. Druga z tych powierzchni dopuszcza jednoparametrową grupę obrotów, a pierwsza jest zupełnie niejednorodna. Omawiane tu obroty są szczególnym wypadkiem *izometrii,* to jest takich odwzorowań przestrzeni na siebie, które zachowują odległość. W czterowymiarowej przestrzeni pseudoeuklidesowej grupa izometrii jest 10-parametrowa; odpowiada jej 10-parametrowa grupa Lorentza, zachowująca p o s t a ć metryki. Grupa Lorentza stanowi, jak to podkreśla F o c k [3], wyraz maksymalnej jednorodności przestrzeni płaskiej. Głębokie fizyczne znaczenie izometrii uwydatnia się między innymi w tym, że z każdą taką izometrią związane jest pewne prawo zachowania. Jako drugi przykład może posłużyć metryka statyczna. Dopuszcza ona jednoparametrową grupę izometrii (przesunięcia „wzdłuż osi czasu"); w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych mamy

$$g_{\alpha\beta,0} = 0\ , \ g_{0k} = 0\,. \tag{28}$$

Za wyróżnione układy współrzędnych można tu uważać wszystkie układy, w których zachodzi (28), a za wyróżnione przekształcenia współrzędnych — takie, które zachowują (28), to znaczy transformacje postaci

$$x'^0 = ax^0 + b\ , \ x'^k = x'^k(x^l)\,.$$

Wyróżnione w ten sposób współrzędne mają, można to pokazać, częściowo znaczenie fizyczne; są więc one „lepsze" niż dowolne współrzędne krzywoliniowe, w których warunki (28) nie są spełnione.

Istnieją jeszcze inne sytuacje fizyczne, pozwalające na obiektywne wyróżnienie pewnych układów współrzędnych. Jeśli mamy „wyspowy", odosobniony układ ciał, to możemy przyjąć, że w dużych odległościach od niego metryka jest pseudoeuklidesowa. Mówiąc niezbyt ściśle oznacza to, że istnieją układy współrzędnych, w których $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ w nieskończoności przestrzennej. W takim wypadku można uważać za wyróżnione właśnie te układy współrzędnych, w których metryka jest asymptotycznie galileuszowa. Z praw zachowania [2] $(\mathfrak{T}^\nu_\mu + \mathfrak{t}^\nu_\mu)_{,\nu} = 0$ wynika, że cztery wielkości

$$\int\limits_{\infty} (\mathfrak{T}^0_\mu + \mathfrak{t}^0_\mu)\, d_{(3)}x \tag{29}$$

obliczone w pewnym wyróżnionym układzie są stałe w czasie. Nie zmieniają się one przy takich przekształceniach układu współrzędnych, które w nieskończoności przestrzennej dostatecznie mało różnią się od przekształcenia tożsamościowego; względem transformacji afinicznych zachowują się one jak współrzędne wektora. Ograniczając się do współrzędnych galileuszowych w nieskończoności możemy więc wprowadzić dla układu odosobnionego wektor całkowitego pędu i energii. Całki (29) obliczone w dowolnym układzie współrzędnych są na ogół rozbieżne.

[2] $\mathfrak{t}^\nu_\mu$ oznacza tu tzw. pseudotensor energii-pędu pola grawitacyjnego.

Jeśli czasoprzestrzeń o asymptotyce euklidesowej posiada pewną symetrię, to wygodnie jest za wyróżnione układy współrzędnych przyjąć te, które równocześnie uwzględniają tę symetrię oraz zachowanie się metryki w nieskończoności (przykład: pole Schwarzschilda). Jeśli natomiast czasoprzestrzeń jest, poza nieskończonością przestrzenną, zupełnie niejednorodna, wszystkie układy współrzędnych, w których $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$ są fizycznie jednakowo uprzywilejowane.

Odmienne stanowisko w tej sprawie zajmuje Fock. Uważa on, że dla wyspowych rozkładów materii fizycznie (obiektywnie) wyróżnione są tak zwane współrzędne harmoniczne, spełniające

$$\Box x^\alpha \equiv (\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta})_{,\beta}/\sqrt{-g} \equiv - g^{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0 \,. \tag{30}$$

Mówiąc dokładniej Fock nakłada na rozwiązanie równań pola (25) żądanie znikania w nieskończoności (φ oznacza dowolną składową różnicy $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$):

$$|\varphi| < M/r, \quad \text{dla dużych } r, \tag{31}$$

oraz warunki wypromieniowania (Sommerfelda):

$$\lim_{r \to \infty} (\partial(r\varphi)/\partial r + \partial(r\varphi)/\partial x^0) = 0. \tag{32}$$

Wyróżnione są teraz te spośród układów spełniających warunek de Dondera (30), w których metryka posiadała własności wyrażone wzorami (31) i (32). Streścimy pokrótce argumenty przedstawione na poparcie twierdzenia o wyróżnionej roli współrzędnych harmonicznych.

1° Fock szkicuje dowód tego, że warunki (30) oraz (31) i (32) zapewniają jednoznaczność rozwiązania równań Einsteina i wyznaczają układ współrzędnych z dokładnością do liniowego przekształcenia pseudoortogonalnego, które nazywa on przekształceniem Lorentza.

2° Równania Einsteina upraszczają się, gdy zastosować warunki (30). Drugie pochodne $g_{\alpha\beta}$ występujące w $R^{\mu\nu}$ zbierają się w „formalny dalambercjan": $R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta}$ + wyrażenie bez drugich pochodnych.

3° Współrzędne harmoniczne, i tylko one, pozwalają na odróżnienie „prawdziwych" pól grawitacyjnych, wywołanych materią zakrzywiającą przestrzeń od pól „pozornych", związanych ze stosowaniem krzywoliniowych, nieinercjalnych układów współrzędnych.

4° Rezygnując z wyróżnionej roli współrzędnych harmonicznych stajemy rzekomo na stanowisku równoważności układów Kopernika i Ptolomeusza.

Polemizując z Fockiem wygodnie jest posłużyć się analogią z elektrodynamiką. Warunek de Dondera $(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0$ jest odpowiednikiem warunku Lorentza $A^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ (analogia jest dość głęboka). Warunek Lorentza pozwala na zapisanie równań Maxwella w postaci $\Box A^{\alpha} = 0$. Warunek Lorentza, podobnie jak (30) w odniesieniu do równań Einsteina, zapewnia jednoznaczność rozwiązania równań Maxwella, jeśli na potencjał nałożyć warunki (31), (32). Dalej, trudno zgodzić się z Fockiem, który uważa, że rozpatrywane przez niego liniowe, pseudoortogonalne przekształcenia współrzędnych harmonicznych (na ogół „krzywoliniowych") stanowią uogólnienie transformacji Lorentza szczególnej teorii względności. Te ostatnie mają charakter geometryczny (fizyczny), którego wyrazem jest niezmienniczość postaci tensora metrycznego względem tych transformacji. Własności tej nie posiadają przekształcenia, które Fock nazywa transformacjami Lorentza; tensor metryczny ma różną postać w różnych układach harmonicznych połączonych między sobą liniowymi przekształceniami pseudoortogonalnymi.

O tak zwanych pozornych i prawdziwych polach grawitacyjnych mówiliśmy już w związku z zasadą równoważności. Ostatni z przytoczonych tu argumentów Focka był przedmiotem ożywionej polemiki [3], [25]—[28]. Bezpodstawność zarzutu Focka została wykazana przez Infelda [27]. Masa Słońca jest tak duża, że planety można uważać za cząstki próbne poruszające się w polu schwarzschildowskim wytwarzanym przez Słońce. Pole to jest euklidesowe w nieskończoności, statyczne i kulistosymetryczne; fizycznie wyróżnione są te wszystkie układy współrzędnych, które uwzględniają powyższe własności pola grawitacyjnego Słońca. Wszystkie te układy współrzędnych można nazwać „kopernikańskimi". Układ geocentryczny Ptolomeusza, w którym Słońce porusza się, $g_{0k} \neq 0$, a metryka w nieskończoności nie jest galileuszowa, oczywiście nie należy do klasy układów wyróżnionych.

Różnicę między poglądami Focka i naszymi można zilustrować na następującym prostym przykładzie.

Weźmy pola Schwarzschilda w trzech różnych układach współrzędnych:

$$(\alpha)\ ds^2 = \left(\frac{r - m/2}{r + m/2}\right)^2 (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{ik} dx^i dx^k \quad \text{(współrzędne izotropowe)},$$

$$(\beta)\ ds^2 = \frac{r-m}{r+m}(dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^3 \sum_{i,k} \left[\frac{m^2 x^i x^k}{r^2(r^2 - m^2)} + \delta^{ik}\right] dx^i dx^k \quad \text{(współ-}$$

rzędne harmoniczne),

(γ) ds^2, które otrzymujemy z (β) przy pomocy „przekształcenia Lorentza":

$$x'^1 = (x^1 - \beta x^0)/\sqrt{1-\beta^2}\ ,\ x'^0 = (x^0 - \beta x^1)/\sqrt{1-\beta^2}\ ,\ x'^2 = x^2\ ,\ x'^3 = x^3.$$

Według Focka wyróżnione są układy współrzędnych, w których metryka ma postać (β) lub (γ); według nas układy (α) i (β) są równie dobre, natomiast układ (γ) jest mniej wygodny (metryka zależy od x^0).

Reasumując, narzucanie na układ warunku de Dondera jest często równie wygodne jak normowanie potencjału elektromagnetycznego przy pomocy warunku Lorentza, ale i równie pozbawione znaczenia fizycznego.

Literatura

1. A. Einstein, *Autobiographisches* w zbiorze *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, The Library of Living Philosophers, wyd. 2, New York 1951.
2. L. Infeld, *Moje wspomnienia o Einsteinie*, Warszawa 1956.
3. В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва 1955.
4. A. Einstein, Jahrb. f. Rad. u. El., **4**, 411 (1907).
5. A. Einstein, Ann. Phys. **38**, 355, 443 (1912).
6. A. Einstein u. M. Grossmann, Ztschr. Math. Phys. **63**, 215 (1914).
7. A. Einstein, Sitzb. Preuss. Ak. Wiss., 1030 (1914).
8. A. Einstein, Ann. Phys. **49**, 769 (1916).
9. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, wyd. 2, Berlin 1954.
10. F. Klein, Math. Ann. **43**, 63 (1893).
11. E. Noether, Nachr. Ges. Göttingen, 235 (1918).
12. E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 (1951).
13. A. Einstein, Ann. Phys. **55**. 241 (1918).
14. A. Einstein, Ann. Phys. **35**, 898 (1911).
15. F. Kottler, Wien. Ber. **122**, 1659 (1912).
16. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, wyd. 4, Princeton 1953.
17. F. J. Belinfante, Physica **7**, 449 (1940).
18. E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-Equations*, London 1954.
19. A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. (London), **209**, 248 (1951).
20. L. Infeld, Acta Phys. Polon. **13**, 187 (1954).
21. A. Papapetrou, Proc. Phys. Soc. A **64**, 57 i 302 (1951).
22. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, Ann. Math. **39**, 65 (1938).
23. J. H. Haywood, Proc. Phys. Soc. **A65**, 170 (1952).
24. L. Infeld, A. E. Scheidegger, Can. J. Math. **3**, 195 (1951).
25. V. A. Fock, Myśl Filozof. Nr 4 (10), 162 (1953).
26. V. A. Fock, artykuł w zbiorze *Миколай Коперник*, Москва 1947.
27. L. Infeld, Myśl Filozof. Nr 1 (11), 70 (1954).
28. V. A. Fock, artykuł w zbiorze *Materiały z konferencji Fizyków w Spale*, Warszawa 1954.