RELATIVITÉ. — *Sur la propagation des discontinuités du tenseur de Riemann.* Note (*) de M. **André Trautman**, présentée par M. Georges Darmois.

Un système d'équations différentielles ordinaires permet de trouver les changements des discontinuités du tenseur de courbure le long des rayons gravitationnels. Ce système est résolu dans le cas d'un champ de Schwarzschild.

Il est bien connu (1) que l'étude des discontinuités du tenseur de courbure des espaces-temps de la Relativité se rattache étroitement à celle du rayonnement gravitationnel. La structure algébrique de ces discontinuités a été l'objet de plusieurs travaux (2); nous nous proposons ici de dériver une équation différentielle qui régit le changement des discontinuités le long des rayons gravitationnels.

Nous nous restreignons aux espace-temps V_4 et aux systèmes des coordonnées tels que le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) soit de classe (C^1, C^2 par morceaux). Nous supposons que les changements de coordonnées sont de classe (C^2, C^3 par morceaux) (3). Si $\varphi(x^\nu) = 0$ est l'équation d'une hypersurface sur laquelle apparaissent les discontinuités $[\partial_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}]$ des dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$, nous pouvons écrire (2)

$$[\partial_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}] = h_{\mu\nu}\, \partial_\rho \varphi\, \partial_\sigma \varphi. \tag{1}$$

Des équations du champ $R_{\mu\nu} = 0$ on déduit les conditions algébriques sur $h_{\rho\sigma}$:

$$g^{\rho\sigma}[R_{\mu\rho\sigma\nu}] = 0, \tag{2}$$

où $R_{\mu\rho\sigma\nu}$ est le tenseur de Riemann, donc

$$2[R_{\mu\nu\rho\sigma}] = h_{\nu\rho}\, \partial_\mu \varphi\, \partial_\sigma \varphi + h_{\mu\sigma}\, \partial_\nu \varphi\, \partial_\rho \varphi - h_{\mu\rho}\, \partial_\nu \varphi\, \partial_\sigma \varphi - h_{\nu\sigma}\, \partial_\mu \varphi\, \partial_\rho \varphi.$$

Pour S telle que $g^{\rho\sigma}\, \partial_\rho \varphi\, \partial_\sigma \varphi \neq 0$ nous pouvons facilement résoudre les équations (2) : $h_{\mu\nu} = h_\mu\, \partial_\nu \varphi + h_\nu\, \partial_\mu \varphi$; les h_ν sont ici des fonctions arbitraires définies sur S. Les discontinuités correspondantes du tenseur de courbure sont nulles et les fonctions peuvent être annulées par un changement de coordonnées approprié. Nous concluons que les discontinuités physiques du champ gravitationnel peuvent apparaître seulement sur des hypersurfaces nulles (caractéristiques), satisfaisant à

$$g^{\rho\sigma}\, \partial_\rho \varphi\, \partial_\sigma \varphi = 0. \tag{3}$$

Pour S nulle, nous tirons de (2) un système de quatre équations :

$$(4) \qquad h^{\nu}_{\mu}\,\partial_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}\,h^{\nu}_{\nu}\,\partial_{\mu}\varphi = 0.$$

Soit Σ une surface à deux dimensions comprise dans une hypersurface orientée dans l'espace; nous pouvons (en général) trouver une hypersurface nulle S passant par Σ. Donnons sur Σ les valeurs de $h_{\mu\nu}$ compatibles avec (4), que peut-on dire de $h_{\mu\nu}$ sur S ? Nous allons formuler une équation permettant de résoudre ce problème des valeurs initiales. Il est important de noter qu'il n'est pas vrai que toute solution de (4) sur S représente un champ de discontinuités admissibles.

Supposons que l'équation (3) soit satisfaite par φ identiquement; nous pouvons définir les bicaractéristiques (rayons gravitationnels) comme étant les solutions des équations

$$(5) \qquad \frac{dx^{\rho}}{du} = g^{\rho\sigma}\,\partial_{\sigma}\varphi.$$

En vertu de (3) les lignes $x^{\nu} = x^{\nu}(u)$ sont des géodésiques nulles. Choisissons un système de coordonnées spécial, tel que $\varphi \equiv x^{0}$. Les relations

$$[\partial_{0}R_{ik}] = 0 \qquad (i,\,k = 1,\,2,\,3)$$

sont une conséquence des équations d'Einstein; elles peuvent être mises en forme covariante, valable dans un système de coordonnées arbitraire

$$(6) \qquad 2\,\frac{D}{du}[R_{\mu\nu\rho\sigma}] + \Box\varphi[R_{\mu\nu\rho\sigma}] = 0,$$

où $\Box\varphi \equiv g^{\mu\nu}\,\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi$, ∇_{μ} dénote la dérivée covariante et D est le symbole de la différentielle absolue : $DA = \nabla_{\nu}A\,dx^{\nu}$.

Les équations (6) constituent le système cherché; notons quelques-unes de ses propriétés. Parmi les équations (6) il n'y en a que six qui soient indépendantes; si $h_{\mu\nu}$ est une solution de (6), $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + h_{\mu}\,\partial_{\mu}\varphi + h_{\nu}\,\partial_{\mu}\varphi$ en est une aussi; si la discontinuité $[R_{\mu\nu\rho\sigma}]$ s'annule en un point du rayon $x^{\nu} = x^{\nu}(u)$, elle est égale à zéro en chaque point de ce rayon. Si les conditions (4) sont remplies sur Σ, il en est de même, en vertu de (6), sur toute l'hypersurface S.

Comme un exemple nous pouvons calculer la propagation des discontinuités dans un champ de Schwarzschild :

$$ds^{2} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^{2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^{2} - r^{2}(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta\,d\psi^{2}).$$

Prenons comme Σ la surface de la sphère $r = r_{0} > 2m$, $t = 0$. L'équation (3) peut être résolue facilement, à savoir $\varphi = t - r + r_{0} - 2m\log\{(r - 2m)/(r_{0} - 2m)\}$. Étant données les valeurs de $[R_{\mu\nu\rho\sigma}]$ sur Σ on résout sans peine les équations (5) et (6). Le paramètre u peut être identifié avec r. Il est convenable d'exprimer le résultat en repères orthonormés. Désignons par $e^{\mu}_{\alpha}(\alpha, \ldots, \delta = 0, \ldots, 3$ ne sont pas des indices tensoriels) le champ de quatre vecteurs orthonormés : $e^{\mu}_{0} = \left(1/\sqrt{1-2m/r},\ 0,\ 0,\ 0\right)$, $e^{\mu}_{1} = \left(0,\ \sqrt{1-2m/r},\ 0\ 0\right)$, $e^{\mu}_{2} = (0, 0, 1/r, 0)$, $e^{\mu}_{3} = (0, 0, 0, 1/r \sin\theta)$ et posons $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\mu\nu\sigma\rho} e^{\mu}_{\alpha} e^{\nu}_{\beta} e^{\rho}_{\gamma} e^{\sigma}_{\delta}$. Nous avons alors

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}(r)] = [R_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_0)] \frac{r_0 - 2m}{r - 2m}.$$

Il est intéressant de noter que les discontinuités du tenseur de Riemann tendent vers zéro pour $r \to \infty$ comme $1/r$. Ce comportement asymptotique est caractéristique pour les phénomènes de rayonnement.

(*) Séance du 3 mars 1958.

(1) F. Pirani, *Phys. Rev.*, 105, 1957, p. 1089; A. Trautman, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, Cl. III, 5, 1957, p. 273.

(2) G. Darmois, *Équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. Math.*, 1927); B. Finzi, *Atti Accad. Lincei*, 6, 1949, p. 18; S. O'Brien et J. L. Synge, *Comm. Dublin Inst.*, A 9, 1952.

(3) A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

(*Institut de Physique de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie.*)

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **246**, p. 1500-1502, séance du 10 mars 1958.)

153456-58

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

Imprimé en France