Bulletin
de la
Classe des Sciences

EXTRAIT

L'échiquier spinoriel

par Andrzej Trautman
Membre de l'Académie des Sciences de Pologne

6e série
Tome I

6-9
1990

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

EXPOSÉ

L'échiquier spinoriel

par Andrzej Trautman
Membre de l'Académie des Sciences de Pologne

Ce texte est un résumé assez détaillé de l'exposé fait par l'auteur à l'Académie le 30 juin 1990. Pour plus d'information on peut consulter « The Spinorial Chessboard » par P. Budinich et A. Trautman ainsi que les autres ouvrages cités à la fin de ce texte.

1. L'histoire de la notion de spineur est un bel exemple des rapports fructueux entre les mathématiques et la physique. Cette notion est beaucoup plus importante que connue. Elle se prête mal à la vulgarisation en raison de l'absence d'image géométrique simple représentant les spineurs.

2. Le géomètre de la fin du XX^e siècle peut dire que le spineur apparaît pour la première fois chez Diophante, dans sa solution en entiers positifs x, y, z de l'équation de Pythagore

$$x^2 + z^2 = y^2 \tag{1}$$

En fait, cette équation est équivalente à l'existence d'un « spineur » (p, q), où p et q sont des entiers tels que $q > p > 0$ et

$$\begin{pmatrix} y - x & z \\ z & y + x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(p, q) \tag{2}$$

La solution générale de (1) donnée par Diophante s'en déduit : $x = q^2 - p^2$, $y = p^2 + q^2$, $z = 2pq$. On peut interpréter (2) en disant que le « spineur est une racine carrée du vecteur isotrope » de composantes x, y, z. Cette observation, qui admet une généralisation intéressante aux espaces de dimension > 3, est à la base de l'approche aux spineurs développée par Elie Cartan. La matrice (2) multipliée à gauche par

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

devient une matrice dont le carré est un multiple de la matrice unité

I. Si, en plus, on y considère les nombres x, y, z comme des nombres réels et si on remplace y par $-iy$, où $i = \sqrt{-1}$, on obtient la formule

$$\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

qui donne une forme linéaire en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dont le carré est (proportionnel à) la forme quadratique fondamentale de l'espace euclidien.

3. P.A.M. Dirac (1928) eut l'idée géniale de remplacer dans (4) les coordonnées x, y, z par les opérateurs différentiels $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$. La formule (4) devient

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^2 = \triangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

où $\triangle$ est le laplacien. L'opérateur différentiel de Pauli

$$\vec{\sigma}\,\mathrm{grad} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{6}$$

est un premier exemple d'opérateur de Dirac. Ces opérateurs apparaissent dans les équations de la théorie quantique des particules à spin. Plus précisément, la substitution originale de Dirac concernait l'analogue de (4) dans l'espace-temps à quatre dimensions de la théorie de la relativité restreinte.

4. Au début du développement de la mécanique ondulatoire, les physiciens ont « expliqué » la quantification du moment angulaire par les propriétés des représentations irréductibles du groupe des rotations SO(3). Par exemple, les états quantiques d'un atome de moment angulaire total $\hbar l$ constituent un espace vectoriel de dimension $2l + 1 (l = 0, 1, 2...)$. Le nombre impair $2l + 1$ apparaît dans les observations comme le nombre de raies spectrales dues à la séparation des niveaux de l'atome soumis à l'action d'un champ magnétique (effet Zeeman normal). Ce schéma ne suffit pas puisque dans beaucoup de cas — tel que celui de l'atome d'hydrogène — on voit apparaître un nombre pair (le plus souvent deux) de raies (effet Zeeman dit anomal). Uhlenbeck et Goudsmit (1925) ont avancé l'hypothèse que ces doublets

sont dûs au fait que l'électron a un moment angulaire interne (spin) égal à $\hbar/2$. Wolfgang Pauli a transformé cette hypothèse en une théorie cohérente. Dans cette théorie, la fonction d'onde de l'électron est un champ de spineurs sur $\mathbb{R}^3$ à deux composantes.
Selon B. L. Van der Waerden, le mot « spineur » est dû à Paul Ehrenfest. Dans la théorie non-relativiste de Pauli apparaît le groupe unitaire unimodulaire SU(2) qui agit sur les spineurs et est un recouvrement double et universel de SO(3). Pour les mathématiciens, ce groupe s'identifie, dans ce contexte, au groupe Spin(3). Pour tout $n \geqslant 3$ il y a un groupe simplement connexe Spin(n) et une suite exacte d'homomorphismes de groupes

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin(n)} \to \mathrm{SO}(n) \to 1$$

Les groupes Spin sont définis à partir des algèbres de Clifford, brièvement décrites au § 7.

5. Un succès spectaculaire des spineurs concerne la physique statistique des fermions. À l'époque où l'idée du spin apparaissait, Pauli formulait son fameux principe d'exclusion : dans tout état quantique il n'y a jamais plus d'un électron. Ce principe explique la structure des couches électroniques des atomes, l'arrangement des éléments dans le tableau de Mendeleïev et le phénomène fondamental de la stabilité de la matière. Le principe de Pauli trouve une expression mathématique claire dans la recette suivante : étant donné l'espace vectoriel H_1 des états quantiques à un électron, on construit l'espace H_n des états à n électrons en prenant la n-ième puissance extérieure de H_1. Dans la théorie quantique des champs, quand on veut décrire les situations où le nombre des particules varie au cours du temps (« création et annibilation des particules »), l'espace des états est la somme directe infinie,

$$H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \text{ où } H_0 = \mathbb{C}$$

Une construction analogue convient aux autres particules telles que les photons, protons, etc. Un théorème fondamental, dont la première démonstration, dans le cadre de la théorie quantique des champs, a été esquissée par Pauli (1939), dit que H_n est toujours un produit tensoriel antisymétrisé (puissance extérieure) pour les fermions, c.à.d. particules à spin demi-entier, tandis que pour les particules à spin entier — les bosons — l'espace H_n s'identifie à la n-ième puissance tensorielle symétrisée.

Dans une conférence donnée au Congrès Solvay en 1939, Pauli a dit : « In conclusion, we wish to state that, according to our opinion, the connection between spin and statistics is one of the most important applications of the special relativity theory ».

6. La solution par Diophante de l'équation de Pythagore donne lieu à une application intéressante, définissant les fibrés de Hopf. Considérons les quatre algèbres réelles avec élément unité et sans diviseurs de zéro :

$$\mathrm{K}_1 = \mathbb{R},\ \mathrm{K}_2 = \mathbb{C},\ \mathrm{K}_4 = \mathbb{H},\ \mathrm{K}_8 = \mathbb{O}$$

Rappelons que l'algèbre des octonions $\mathbb{O}$ n'est pas associative mais la sous-algèbre engendrée par une paire quelconque d'octonions jouit de cette propriété. La dimension réelle de K_n est n. Chacune de ces algèbres admet une conjugaison $a \to \bar{a}$ telle que $|a|^2 = \bar{a}a = a\bar{a} \geqslant 0$ et $\bar{a}a = 0$ implique $a = 0$. Considérons l'application

$$\mathrm{K}_n^2 \ni (p, q) \xrightarrow{\pi_n} (\bar{q}q - \bar{p}p, 2\bar{p}q) \in \mathbb{R} \times \mathrm{K}_n \tag{7}$$

La formule de Pythagore donne l'identité

$$(\bar{q}q - \bar{p}p)^2 + |2\bar{p}q|^2 = (\bar{p}p + \bar{q}q)^2 \tag{8}$$

d'où on déduit, par restriction de π_n à la sphère

$$\mathrm{S}_{2n-1} = \{(p, q) \in \mathrm{K}_n^2 \mid \bar{p}p + \bar{q}q = 1\}$$

les quatre fibrés de sphères en sphères,

$$\mathrm{S}_{n-1} \to \mathrm{S}_{2n-1} \xrightarrow{\pi n} S_n \ (n = 1, 2, 4, 8)$$

Ces fibrés ont des liens très étroits avec les structures spinorielles des sphères. En particulier, π_1 donne la structure spinorielle non-triviale du cercle et π_2 celle (unique) de S_2. Les fibrés π_2 (respectivement π_4) joue un rôle fondamental dans la théorie des monopoles magnétiques de Dirac (respectivement des instantons). Toutes les applications π_n sont harmoniques.

7. W. K. Clifford (1878) a considéré une généralisation naturelle de la formule (4) aux formes quadratiques à n variables. Pour les besoins de la physique, il est opportun de prendre une forme quadratique g de signature (k, l),

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} x_\mu x_\mu = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - (x_{k+1}^2 + \ldots + x_{k+l}^2)$$

où $x = (x_\mu) \in \mathbb{R}^n$ et $\mu = 1, \ldots, k + l = n$. Le problème de Clifford est de trouver une famille de n matrices complexes γ_μ à N lignes et N colonnes, $\gamma_\mu \in \mathbb{C}(\mathrm{N})$, telle que

$$(\Sigma\gamma_\mu x_\mu)^2 = \mathrm{I}\Sigma g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

où $\mathrm{I} \in \mathbb{C}(\mathrm{N})$ est la matrice unité. On montre que ce problème a toujours des solutions. On demande que N soit aussi petit que possible ; autrement dit, que le système $\{\gamma_\mu\}$ soit indécomposable. On voit que (10) est équivalent à

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\mathrm{I} \tag{11}$$

et donc l'algèbre réelle $Cl(k, l)$ engendrée par les matrices gammas est une enveloppe linéaire réelle de la famille des matrices

$$\mathrm{I}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_1\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}\gamma_n, \ldots, \gamma_1\ldots\gamma_n = \Gamma \tag{12}$$

Si la dimension n est un nombre pair, $n = 2m$, le système (12) est libre, donc la dimension de $Cl(k, l)$ est 2^{2m} et $\mathrm{N} \geqslant 2^m$. On montre qu'il y a une solution de (11) avec $\gamma_\mu \in \mathbb{C}(2^m)$ et que toute autre solution $\gamma'_\mu \in \mathbb{C}(2^m)$ est équivalente à la première : il existe une matrice inversible T telle que

$$\mathrm{T}\gamma_\mu\mathrm{T}^{-1} = \gamma'_\mu$$

Si $n = 2m + 1$, la matrice Γ commute avec toutes les matrices gammas ; elle est donc un multiple de I. Pour obtenir une base de l'algèbre on peut prendre, dans ce cas, le sous-ensemble de (12) contenant tous les produits pairs : I, $\gamma_1\gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}\gamma_{2m+1}, \ldots, \gamma_2\ldots\gamma_{2m+1}$. Ce sous-ensemble est libre et contient 2^{2m} éléments ; donc, comme auparavant, $\gamma_\mu \in \mathbb{C}(2^m)$. L'algèbre $Cl(k, l)$ est, dans ce cas, isomorphe à la sous algèbre paire de l'algèbre de Clifford. Si $\gamma'_\mu \in \mathbb{C}(2^m)$ est une autre solution de (11), il existe une matrice inversible T telle que

$$\mathrm{T}\gamma_\mu\mathrm{T}^{-1} = \gamma'_\mu \text{ ou } -\gamma'_\mu \tag{14}$$

le signe étant le même pour toutes les valeurs de μ. Pour déterminer le signe il suffit de comparer les matrices Γ et Γ'. Par exemple, les matrices transposées ${}^t\gamma_\mu$ satisfont à (11) et

$${}^t\gamma_1 \ldots {}^t\gamma_{2m+1} = (-)^m\, {}^t(\gamma_1 \ldots \gamma_{2m+1})$$

Il existe donc une matrice B telle que

$${}^t\gamma_\mu = (-1)^m\mathrm{B}\gamma_\mu\mathrm{B}^{-1} \tag{15}$$

pour $\mu = 1, \ldots, 2m + 1$.

Revenons au cas $n = 2m$. La matrice Γ anticommute avec les γ_μ.

Donc, dans ce cas, on peut aussi trouver une matrice B telle que (15) soit satisfait et on a

$$^t\Gamma \mathrm{B} = (-1)^m \mathrm{B}\Gamma, \; n = 2m \tag{16}$$

Pour tout n, la matrice $^t\mathrm{B}\mathrm{B}^{-1}$ commute avec tous les éléments du système irréductible (12). Il en résulte que B est symétrique ou antisymétrique. Précisément,

$$^t\mathrm{B} = (-1)^{m(m+1)/2}\, \mathrm{B} \text{ pour } n = 2m \text{ ou } 2m + 1 \tag{17}$$

La matrice B joue un rôle fondamental : elle définit une forme bilinéaire non-singulière, invariante par l'action du groupe Spin sur l'espace des spineurs. La propriété de symétrie (17) est *périodique par rapport à n avec une période égale à 8.*

Pour tout n, les matrices conjuguées complexes $\bar{\gamma}_\mu$ satisfont aux mêmes relations (11) que les γ_μ. Pour n pair, il existe donc une matrice C telle que

$$\bar{\gamma}_\mu = \mathrm{C}\gamma_\mu \mathrm{C}^{-1}$$

Pour n impair, il faut comparer Γ et $\bar{\Gamma}$. Posons $\nu = l - k$. On a

$$\Gamma^2 = (-1)^{\nu(\nu+1)/2}\mathrm{I} \tag{18}$$

et donc

$$\bar{\gamma}_\mu = (-1)^{\nu(\nu+1)/2}\mathrm{C}\gamma_\mu \mathrm{C}^{-1}$$

Un raisonnement analogue à celui menant à (17) montre que le produit $\bar{\mathrm{C}}\mathrm{C}$ peut toujours être réduit à I ou $-$I. Précisément

$$\bar{\mathrm{C}}\mathrm{C} = \begin{cases} \mathrm{I} \text{ pour } \nu = 0, 1, 6, 7 \mod 8 \\ -\mathrm{I} \text{ pour } \nu = 2, 3, 4, 5 \mod 8 \end{cases} \tag{19}$$

Le cas $\bar{\mathrm{C}}\mathrm{C} = \mathrm{I}$ est réel dans le sens que les γ_μ peuvent être choisies toutes réelles (pour $\nu = 0$ et 7 *mod* 8) ou purement imaginaires (pour $\nu = 1$ et 6 *mod* 8). Les physiciens parlent, dans ces cas, des spineurs de Majorana. Pour $\bar{\mathrm{C}}\mathrm{C} = -\mathrm{I}$, l'algèbre de Clifford en question est isomorphe à une algèbre des matrices avec éléments dans $\mathbb{H}$.

Les propriétés des algèbres $Cl(k, l)$ exprimées par (18) et (19) exhibent une *périodicité par rapport à ν avec une période égale aussi à 8*. Les propriétés relatives à B, C et Γ sont donc aussi périodiques par rapport à k et l avec la même période. Cette remarque justifie l'arrangement des algèbres de Clifford $Cl(k, l)$ pour $0 \leqslant k, l \leqslant 7$ sur un « échiquier spinoriel ». Étant donné les algèbres sur l'échiquier, on en déduit les autres en prenant des produits tensoriels de ces algèbres. Par exemple, les algèbres $Cl(k + 8, l)$ et $Cl(k, l + 8)$ sont toutes deux isomorphes à l'algèbre $\mathbb{R}(16) \otimes Cl(k, l)$. Quand la forme quadratique g est positive ou négative définie, les deux périodicités se confondent. Celle qui reste joue un rôle important en topologie algébrique (la périodicité de Bott des groupes d'homotopies des groupes classiques).

Pour conclure, citons Hermann Weyl (1946) :

« The orthogonal transformations are the automorphisms of Euclidean vector space. Only with the spinors do we strike that level in the theory of its representations on which Euclid himself, flourishing ruler and compass, so deftly moves in the realm of geometric figures ».

REMERCIEMENT

L'auteur remercie le Fonds National de la Recherche Scientifique pour le subside qui lui a permis de venir en Belgique travailler en collaboration avec Michel Cahen et Simone Gutt à l'Université Libre de Bruxelles.

REFERENCES

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, *Clifford modules*, Topology 3, Suppl. 1 (1964) 3-38.

[2] R. Bott, *The stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math. 70 (1959) 313-337.

[3] P. Budinich and A. Trautman, *The spinorial chessboard*, Springer, Berlin, 1988.

[4] M. Cahen et L. Lemaire, *Applications harmoniques : le succès d'une recherche non-planifiée*, Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., 5ᵉ sér. 74 (1988) 350-364.

[5] E. Cartan, *La théorie des spineurs I et II*, Hermann, Paris, 1938.

[6] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

[7] L. Dabrowski and A. Trautman, *Spinor structures on spheres and projective spaces*, J. Math. Phys. 27 (1986) 2022-2028.

[8] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron I and II*, Proc. Roy. Soc. (London) A117 (1928) 610-624 and A118 (1928) 351-361.

[9] H. Hopf, *Uber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fund. Math. 25 (1935) 427-440.

[10] W. Pauli, *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons*, Z. Phys. 43 (1927) 601-623.

[11] W. Pauli, *The connection between spin and statistics*, Phys. Rev. 58 (1940) 716-722.

[12] W. Pauli, *Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac*, Ann. Inst. Henri Poincaré 6 (1936) 109-136.

[13] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, vols 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1984 and 1986.

[14] I. R. Porteous, *Topological geometry*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[15] A. Trautman, *Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings*, Int. J. Theor. Phys. 16 (1977) 561-565.

[16] B. L. VAN DER WAERDEN, *Exclusion principle and spin*, in : Theor. Phys. in the 20th Century : A Memorial Volume to Wolfgang Pauli, eds. M. Fierz and V. F. Weisskopf, Interscience, New York, 1960.

Abstract : The notions of spinor and Clifford algebra are briefly reviewed in a historical perspective ; the two periodicity properties of real Clifford algebras are indicated and used to arrange the algebras on a ' spinorial chessboard '.