5 7

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Un théorème sur les champs de Yang-Mills isotropes*. Note (*) de **Andrzej Trautman,** présentée par André Lichnerowicz.

On démontre qu'à toute famille des géodésiques isotropes sans distorsion dans un espace-temps conforme on peut associer un champ de de Yang-Mills isotrope et sans sources.

MATHEMATICAL PHYSICS. — A Theorem on Isotropic Yang-Mills Fields.

It is shown that, in a conformal space-time, with any congruence of null and shear-free geodesics one can associate a null (isotropic) solution of the Yang-Mills equation without sources.

Soit M un espace-temps conforme que nous définissons ici comme une variété différentiable de classe C^∞, difféomorphe à $\mathbb{R}^4$, orientée et munie d'une classe d'équivalence des métriques pseudoriemanniennes de signature hyperbolique normale, deux tenseurs métriques g et g' étant considérés comme équivalents s'il existe une fonction positive $f: M \to \mathbb{R}$ telle que $g' = fg$. Une configuration de Yang-Mills sur M est décrite par un potentiel A qui est une 1-forme sur M à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le champ de Yang-Mills correspondant :

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A], \tag{1}$$

est une 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Le dual $\star$ F de F est bien défini par la structure conforme et par l'orientation de M. Les équations de Yang-Mills sans sources s'écrivent :

$$D \star F = 0, \tag{2}$$

où $D = d + [A, \ .]$ est la dérivée covariante extérieure. Le champ F est dit *isotrope* s'il existe sur M un champ vectoriel k, ne s'annulant en aucun point de M, tel que :

$$k \lrcorner F = 0 \tag{3}$$

et :

$$g(k) \wedge F = 0, \tag{4}$$

où $g(k)$ est la 1-forme associée à k par l'isomorphisme induit par un tenseur g appartenant à la structure conforme de M. Si $F \neq 0$, le champ k est aussi isotrope :

$$k \lrcorner g(k) = 0. \tag{5}$$

Si c'est le cas et L_k dénote la dérivée de Lie par rapport à k, l'équation :

$$g(k) \wedge L_k g(k) = 0, \tag{6}$$

est équivalente à la condition que les trajectoires de k soient des géodésiques isotropes [1]. Il est clair que les conditions (3)-(6) ont un caractère conforme, c'est-à-dire sont invariantes par $g \mapsto g' = fg$. Les conditions d'isotropie (3) et (4) sont aussi invariantes par transformations de jauge.

L'objet de cette Note est de présenter un théorème sur l'existence d'un champ de Yang-Mills isotrope associé à un champ vectoriel k dont les trajectoires constituent une famille des géodésiques isotropes sans distorsion. Le théorème généralise les résultats classiques de L. Mariot et I. Robinson sur les champs électromagnétiques isotropes et en donne une démonstration nouvelle.

LEMME 1. — *Soit k un champ vectoriel sur un espace pseudoriemannien orienté* M *à* n *dimensions. Pour tout élément* α *de l'algèbre de Cartan* Γ (M) *des formes différentielles sur* M *on a :*

$$[L_k, \star]\,\alpha = \left(i(K) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,K \right) \star \alpha, \tag{7}$$

où $K = g^{-1} \circ L_k g$ *est le champ des tenseurs dont les composantes dans un corepère* (e^μ) *tel que* $g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$ *sont :*

$$K^\mu{}_\nu = \nabla^\mu k_\nu + \nabla_\nu k^\mu, \quad k_\nu = g_{\nu\sigma} k^\sigma,$$

et $i(K)$ *désigne la dérivation de l'algèbre* $\Gamma(M)$ *définie par* K.

La formule (7) généralise un résultat de B. Coll [2]. On voit facilement que le commutateur $[L_k, \star]$ anticommute avec $\star$ et que (7) a un caractère conforme si l'on se restreint aux formes de degré m dans un espace M à dimension $n = 2m$.

LEMME 2. — *Soit* F *une 2-forme sur un espace-temps conforme* M, *ne s'annulant en aucun point de* M. *Si* F *est isotrope et k est le champ vectoriel associé à* F *par* (3) *et* (4), *la condition :*

$$[L_k, \star]\,F = 0, \tag{8}$$

équivaut à l'existence d'une fonction λ *et d'un champ vectoriel* l *sur* M, *tels que :*

$$K = l \otimes g(k) + k \otimes g(l) + \lambda I. \tag{9}$$

La démonstration de ce lemme, dont le caractère conforme est évident, est facile à partir du lemme précédent.

On peut mettre l'équation (9) sous la forme équivalente :

$$L_k g = g(l) \otimes g(k) + g(k) \otimes g(l) + \lambda g, \tag{10}$$

dont l'interprétation géométrique est claire : le groupe (local) à un paramètre des difféomorphismes engendré par k laisse invariante la distribution Ker $g(k)$ *des espaces orthogonaux à* k, avec leurs structures conformes, induites par celle de M. On voit aisément que (10) implique (6) : les trajectoires de k sont des géodésiques isotropes. L'information supplémentaire contenue dans (9) ou (10) signifie que cette famille de géodésiques est sans distorsion [1].

Étant donné un potentiel de Yang-Mills A quelconque et un champ vectoriel isotrope k, **on peut toujours obtenir :**

$$k \lrcorner A = 0, \tag{11}$$

par une transformation de jauge $A \mapsto U^{-1} A U + U^{-1} dU$. Un champ de Yang-Mills F correspondant au potentiel A et satisfaisant à (3) est invariant, dans la jauge isotrope (11), par le groupe engendré par k :

$$L_k F = 0. \tag{12}$$

Si, en plus, F satisfait à (4) et aux équations de Yang-Mills (2), on a :

(13) $$L_k \star F = 0,$$

et donc aussi (8). Il en résulte que le champ vectoriel *k* associé à une solution isotrope et non-nulle des équations de Yang-Mills satisfait à (10) et donc engendre une famille de géodésiques isotropes sans distorsion.

Pour faciliter l'énoncé du théorème inverse nous restreignons le champ isotrope k à satisfaire aux hypothèses suivantes :

(H1) *le champ vectoriel k est complet, c'est-à-dire engendre un groupe à un paramètre* (φ_t) *donné par l'application différentiable :*

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M \quad \textit{avec} \quad \varphi_t(x) = \varphi(t, x),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in M$.

(H2) *Il existe une sous-variété* S *de* M, *transversale aux trajectoires de k et telle que :*

$$\varphi \,|\, \mathbb{R} \times S \to M,$$

soit un difféomorphisme.

Lemme 3. — *Soit* $j : S \to M$ *l'injection canonique de la sous-variété qui jouit de la propriété* (H2). *Si* α *est une forme différentielle sur* M *telle que :*

$$j^* \alpha = 0 \quad \textit{et} \quad j^*(k \lrcorner \alpha) = 0,$$

$$L_k \alpha = \textit{une forme, fonction linéaire et homogène en } \alpha,$$

où $j^* \alpha$ *est l'image inverse de* α *par l'application j, on a :*

$$\alpha = 0 \quad \textit{sur} \quad M.$$

Ce lemme résulte du théorème classique sur l'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Théorème. — *Étant donné dans un espace-temps conforme* M *un champ vectoriel isotrope k satisfaisant à la condition* (10) *et aux hypothèses* (H1, H2), *on peut lui associer une solution des équations de Yang-Mills* (2) *en demandant que le potentiel soit invariant par le groupe engendré par k :*

(14) $$L_k A = 0,$$

et que les données de Cauchy sur S *satisfassent à :*

(15) $$j^*(k \lrcorner A) = 0,$$

(16) $$j^*(g(k) \wedge F) = 0,$$

(17) $$j^* D \star F = 0.$$

Il faut bien remarquer que l'équation de contrainte (16) ne contient aucune dérivée de A dans les directions transversales à S, tandis que (17) est l'analogue de la condition div $E = 0$ de la théorie de Maxwell. Une étude plus détaillée, qui sera publiée ultérieurement, montre que les équations des contraintes (15)-(17) sont compatibles avec (14) et admettent, au moins localement, des solutions non triviales.

Pour démontrer le théorème il suffit de définir le potentiel à partir de (14) et de vérifier que les conditions (2)-(4) sont satisfaites. Puisque :

$$L_k(k \lrcorner A)=k \lrcorner L_k A,$$

on obtient (11) à partir de (14), (15) et du lemme 3. L'identité générale :

$$k \lrcorner F = L_k A - D(k \lrcorner A),$$

conduit à (3). L'équation (14) implique (12), donc :

$$L_k(g(k) \wedge F) = L_k g(k) \wedge F.$$

En vertu de (10), la forme $L_k g(k)$ est parallèle à $g(k)$. Puisque $k \lrcorner (g(k) \wedge F)=0$, il résulte du lemme 3 appliqué à $\alpha = g(k) \wedge F$ que cette forme s'annule et donc F est isotrope. Le lemme 2 en conjonction avec (12) donne (13).

A partir des identités :

$$k \lrcorner D \star F = L_k \star F - D(k \lrcorner F) + [k \lrcorner A, \star F],$$
$$k \lrcorner \star F = \star(F \wedge g(k)),$$

on obtient $k \lrcorner D \star F=0$. L'application du lemme 3 à la 3-forme $\alpha = D \star F$ achève la démonstration du théorème.

Plusieurs exemples de champs de Yang-Mills isotropes sont connus ([3]-[6]). **Ce travail a été subventionné par la « Einstein Memorial Foundation ».**

(*) Remise le 27 juin 1983.

[1] I. Robinson et A. Trautman, *J. Math. Phys.*, 24, 1983, p. 1425-1429.

[2] B. Coll, *J. Math. Phys.*, 18, 1977, p. 1918-1922.

[3] S. Coleman, *Phys. Lett.*, B70, 1977, p. 59-61.

[4] H. Urbantke, *J. Math. Phys.*, 20, 1979, p. 1851-1860.

[5] R. Güven, *Phys. Rev.*, D19, 1979, p. 471-472.

[6] A. Trautman, *J. Phys.*, A13, 1981, p. L1-3.

Institut für Theoretische Physik, Universität Wien,
Boltzmanngasse 5, A-1090 Wien, Austria.