

## IV.

# Metody geometryczne w klasycznej teorii pola

A. TRAUTMAN (WARSZAWA)

Celem niniejszego wykładu jest przedstawienie metod geometrii różniczkowej, używanych w niektórych zagadnieniach fizycznych. Ograniczamy się do fizyki klasycznej i do takich prostych zjawisk jak ruch punktów materialnych, grawitacja i elektromagnetyzm. Wybieramy tylko niektóre, mniej znane metody i zagadnienia, a pomijamy takie ważne i tradycyjne tematy jak zastosowanie geometrii Riemanna do mechaniki analitycznej i ogólnej teorii względności oraz zastosowanie teorii grup Liego do znajdowania rozwiązań równań pola. Aby ułatwić śledzenie wykładu, zawieramy w nim pewne fragmenty geometrii różniczkowej, wykraczające poza podstawowy program uniwersytecki.

Od dawna wiadomo, że język i metody geometrii różniczkowej są potrzebne w teorii względności, a szczególnie w relatywistycznej teorii grawitacji. Chwila zastanowienia wystarcza, aby przekonać się, że każdą fizyczną teorię czasu i przestrzeni można ująć w języku geometrii. Ujęcie takie ułatwia zrozumienie pojęć występujących w teorii fizycznej i umożliwia porównywanie różnych teorii, takich jak mechanika Newtona i teoria względności. Okazuje się, że również inne fragmenty fizyki, bogatsze niż teoria czasoprzestrzeni, zyskują na geometryzacji. Zastrzegamy się, że *geometryzacje* rozumiemy tutaj szeroko, jako podanie jakiegokolwiek modelu geometrycznego teorii fizycznej. To samo słowo bywa używane w węższym znaczeniu w związku z programem „geometryzacji fizyki”, wysuniętym po sformułowaniu przez Einsteina ogólnej teorii względności. Według tego programu wszystkie wielkości i pojęcia fizyczne (np. pole elektromagnetyczne) powinno się sprowadzić do wielkości i pojęć geometrycznych, dotyczących czasoprzestrzeni.

We wstępie do każdej teorii fizycznej powinno się omówić stosunek między zjawiskami fizycznymi a matematycznymi konstrukcjami używanymi do ich opisu. W odniesieniu do teorii czasu i przestrzeni mówi się zwykle, że przestrzenie matematyczne (rozmaiłości, przestrzenie Riemanna, afiniczne) są *modelami* czasoprze-

strzeni fizycznej. Oznacza to, że między modelem a czasoprzestrzenią istnieje „izomorfizm”, tzn. odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne, które strukturom geometrycznym modelu przyporządkowuje odpowiednie konstrukcje fizyczne w czasoprzestrzeni. Dokładniejsze omówienie pojęcia modelu można znaleźć w literaturze [8]. W dalszym ciągu niniejszego wykładu będziemy utożsamiali czasoprzestrzeń z jej modelem, co jest nieściśle, ale wygodne. Zwrot „czasoprzestrzeń jest rozmaitością” będzie więc oznaczać tyle, co „rozmaitość jest modelem czasoprzestrzeni”.

## 1. Geometria czasoprzestrzeni

W większości wykładów i podręczników przeciwstawia się sobie rozmaite teorie czasoprzestrzeni, a w szczególności mocno podkreśla różnice między teorią Newtona a teorią względności. Łatwo jednak zauważyć, że wszystkie te teorie mają wiele elementów wspólnych, a różnice między nimi, jeśli spojrzeć na nie z odpowiednio ogólnego punktu widzenia, nie są tak wielkie jak wydają się być przy powierzchownej analizie.

Wszystkie dotychczasowe teorie fizyczne opierają się na założeniu, że czasoprzestrzeń jest *czterowymiarową rozmaitością różniczkową*<sup>1)</sup>. Jak wiadomo, oznacza to, że lokalne własności topologiczne i różniczkowe czasoprzestrzeni są takie jak przestrzeni liczbowej  $\mathbf{R}^4$ . Czterowymiarowość czasoprzestrzeni podkreśla się dopiero od czasu Einsteina, ale w istocie już Newton posługiwał się rozmaitością czterowymiarową do opisu zjawisk mechanicznych. Znajduje to wyraz w tym, że aby określić elementarne *zdarzenie*, tzn. coś, o czym można powiedzieć jedynie, gdzie i kiedy zachodzi, należy podać cztery liczby: trzy współrzędne przestrzenne oraz czas. Czterowymiarowość czasoprzestrzeni  $E$  mechaniki Newtona jest istotna w tym sensie, że, wbrew temu, co niektórzy twierdzą, nie istnieje naturalne<sup>2)</sup> przedstawienie

<sup>1)</sup> W literaturze obcej, a także polskiej, używa się zwykle terminu *rozmaitość różniczkowalna*. Wydaje nam się, że różniczkowalność oznacza własność, która może być udziałem odwzorowania (funkcji) a nie samej rozmaitości (przestrzeni). Będziemy więc np. mówili o funkcjach różniczkowalnych, określonych na rozmaitości różniczkowej, a także o formach różniczkowych, które mogą, ale nie muszą, być różniczkowalne. Mówiąc o rozmaitościach, będziemy mieli na myśli wyłącznie rozmaitości rzeczywiste.

<sup>2)</sup> Przymiotnika *naturalny* używamy tutaj i w dalszym ciągu w następującym znaczeniu: mówimy, że pewien zbiór albo relacja jest w danej teorii naturalna, jeśli można ją skonstruować używając wyłącznie pojęć właściwych dla tej teorii, bez wprowadzania elementów obcych (zewnętrznych). Niektóre odwzorowania naturalne nazywa się *kanonicznymi*. Na przykład jeśli  $S$  jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową, a  $S^*$  — przestrzenią dualną, to  $S$  i  $S^{**}$  są izomorficzne w sposób kanoniczny, natomiast  $S$  i  $S^*$  są izomorficzne, ale żaden z tych izomorfizmów nie jest wyróżniony. W teorii przestrzeni wektorowych nie istnieje naturalny izomorfizm  $S$  na  $S^*$  [2]. Pojęcie naturalności zostało ściśle określone w teorii kategorii, zob. np. [13].

$E$  w postaci iloczynu  $P \times T$ , gdzie  $P$  i  $T$  są rozmaitościami o dodatnich wymiarach (np. 3 i 1). Przedstawienie takie byłoby sprzeczne z zasadą względności Galileusza.

W związku z próbami zbudowania jednolitej teorii pola rozpatruje się w fizyce teorie, według których rozmaitość podstawowa ma więcej wymiarów niż cztery. Wśród tych teorii najbardziej znany i udany jest wariant pięciowymiarowy Kaluzy i Kleina. Jednak również w tych teoriach czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa. Pojawia się ona jako rozmaitość ilorazowa rozmaitości podstawowej przez odpowiednią relację równoważności.

Zgodnie z naszą umową, że czasoprzestrzeń jest rozmaitością, elementy tej rozmaitości  $E$  możemy nazywać zdarzeniami. Będziemy zakładali, że zbiór zdarzeń odpowiadających ruchowi punktu materialnego jest regularną krzywą w  $E$ ; tę krzywą nazywa się *linią świata* punktu materialnego albo po prostu *ruchem*.

Nasuwa się pytanie, czy można spodziewać się, że w przyszłości będziemy używali innych modeli czasoprzestrzeni niż rozmaitości różniczkowe? Albo krócej, *czy czasoprzestrzeń jest naprawdę rozmaitością?* Wszystkie dotychczasowe próby zrezygnowania ze struktury rozmaitości w teorii czasoprzestrzeni kończyły się niepowodzeniem. Argumenty, które przytacza się przeciwko pogładowi, że rozmaitość jest trwałym modelem czasoprzestrzeni, można podzielić na trzy grupy.

Po pierwsze, przekonanie o charakterze euklidesowym (w sensie topologicznym różniczkowym) czasoprzestrzeni opiera się na obserwacjach dotyczących szerokiego, ale ograniczonego, zakresu odległości, od atomowych do astronomicznych. Kosmologia wskazuje na to, że Wszechświat jako całość może posiadać topologię różną od euklidesowej. Nasuwa się przypuszczenie, że obecna ekstrapolacja naszych obserwacji w kierunku mikroświata również nie jest słuszna, tzn. że czasoprzestrzeń „ogładana przez odpowiednio silne szkło powiększające” ujawniłaby strukturę różną od struktury rozmaitości.

Druuga grupa argumentów wykorzystuje szczególne właściwości obiektów mikroświata, opisywane przez współczesne teorie kwantowe. Aby rozmaitość mogła być dobrym modelem czasoprzestrzeni, powinno dać się identyfikować dowolnie bliskie zdarzenia („ciągłość” czasoprzestrzeni). Ze względu na atomową budowę materii i niepunktowość cząstek elementarnych wydaje się to jednak niemożliwe. W związku z tym snuje się przypuszczenia, że ta zasadnicza niemożliwość powinna znaleźć odbicie w budowie czasoprzestrzeni, podobnie do tego jak lokalna nierozróżnialność sił grawitacyjnych od sił inercji jest ujmowana w ogólnej teorii względności.

Wreszcie, po trzecie, ciągłość czasoprzestrzeni obwinia się za nieskończoności (rozbieżności), które pojawiają się w teoriach relatywistycznych, zarówno klasycznych jak i kwantowych. Istotę rzeczy można zobaczyć na przykładzie energii pola elektrycznego  $E$  ładunku punktowego  $q$ . Energię tę można napisać w postaci całki

$$\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{q^2}{r^2} dr$$

której jest rozbieżna ze względu na dolną granicę.

Próby modyfikacji podstawowych założeń o strukturze czasoprzestrzeni wiąże się najczęściej z hipotezą długości elementarnej. Oczywiście, każda zmiana naszych wyobrażeń o budowie czasoprzestrzeni pociągnęłaby za sobą gruntowną rewizję całej fizyki. Jak już wspomnieliśmy, dotychczas nikomu nie udało się podać żadnego rozsądnego modelu czasoprzestrzeni, innego niż rozmaitość różniczkowa.

Strukturą wspólną dla wszystkich teorii czasoprzestrzeni jest *koneksja liniowa* (powiązanie liniowe)<sup>1)</sup>.

Fizyczna podstawa istnienia koneksji liniowej w czasoprzestrzeni jest zawarta w pierwszym prawie dynamiki i jego uogólnieniach. Istotnie, w teorii Newtona i przy zaniedbaniu zjawisk grawitacyjnych treść pierwszego prawa dynamiki można przedstawić w sposób następujący:

Po pierwsze, mówi ono, że istnieje wyróżniona klasa ruchów punktów materialnych, zwanych *ruchami swobodnymi*. W wykładzie mechaniki dodaje się w tym miejscu komentarz na temat, co należy rozumieć przez ruchy swobodne i jak takie ruchy realizować. Mianowicie, w tym celu trzeba wyeliminować wszystkie siły i oddziaływania mogące wpływać na ruch punktu. Dla nas istotne jest jednak tylko to, że takich ruchów jest dostatecznie dużo, w łatwym do sprecyzowania znaczeniu.

Po drugie, pierwsza zasada dynamiki orzeka istnienie takiego (globalnego) układu współrzędnych, względem którego linie świata ruchów swobodnych są prostymi w tym znaczeniu, że można je określić za pomocą liniowych związków między współrzędnymi. Widać stąd, że pierwszą zasadę dynamiki można sformułować tak: w czasoprzestrzeni istnieje symetryczna, płaska koneksja liniowa; linie świata ruchów swobodnych są geodetykami względem tej koneksji. Zupełnie taka sama zasada dynamiki obowiązuje w ramach szczególnej teorii względności. Jeśli chcemy uwzględnić grawitację, musimy ruchy swobodne zastąpić przez *spadki swobodne*<sup>2)</sup> i usunąć przymiotnik „płaska” w opisie koneksji. Założenie o tym, że koneksja jest symetryczna, można by łatwo opuścić względnie zastąpić innym. Przyjmuje się je głównie z tego względu, że skrócenie koneksji nie wpływa na geodetyki, a więc ze znajomości samych geodetyk nie można określić skrócenia.

Dalsze struktury geometryczne czasoprzestrzeni, ich własności i związki między nimi a koneksją liniową zależą już od rodzaju teorii. Omówimy je krótko w trzech najważniejszych przypadkach: w teorii Newtona, w elektrodynamice przedrelatywistycznej i w teorii Einsteina. Obiekty geometryczne będziemy opisywać za pomocą ich naturalnych składowych względem lokalnego układu współrzędnych  $\xi = (\xi^i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

<sup>1)</sup> Koneksję w wiązce baz wektorowych rozmaitości różniczkowej nazywa się koneksją liniową. Odpowiednio, koneksja afiniczna oznacza koneksję w wiązce baz afinicznych [4].

<sup>2)</sup> Przez spadek swobodny rozumiemy ruch punktu materialnego, na który nie działają żadne siły poza siłą grawitacyjną. Tej ostatniej nie można wyeliminować, gdyż stosunek masy grawitacyjnej do masy bezwładnej jest jednakowy dla wszystkich ciał.

**1.1. Teoria Newtona** charakteryzuje się istnieniem czasu absolutnego, tzn. funkcji różniczkowalnej, która jest parametrem afinicznym wzdłuż geodetyk transwersalnych względem przestrzeni równego czasu (rys. 1). Ostatnie zdanie oznacza, że jeśli  $\tau$  jest czasem absolutnym (wyrażonym przez współrzędne lokalne), a  $t \rightarrow x(t)$  — krzywą, to

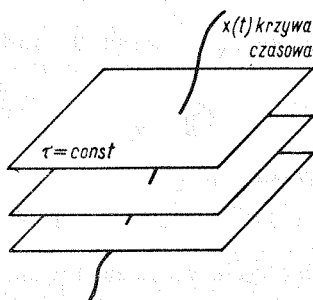
$$\text{jeśli } \tau \circ x = \text{id} \quad \text{oraz} \quad \frac{D}{dt} \frac{dx^i}{dt} = \lambda(t) \frac{dx^i}{dt}, \quad \text{to } \lambda = 0$$

gdzie  $\text{id}$  oznacza odwzorowanie tożsamościowe, a  $\frac{D}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \nabla_i$  pochodną absolutną.

Różniczkując równanie  $\tau \circ x(t) = t$  dwukrotnie, biorąc pod uwagę dowolność  $dx^i/dt$  oraz symetrię koneksji, otrzymujemy

$$\nabla_i \tau_j = 0 \quad (1.1)$$

gdzie  $\tau_j = \partial\tau/\partial x^j$  jest formą czasu absolutnego. Wektor  $v^i$  taki, że  $v^i \tau_i = 0$ , nazywa się przestrzennym; wektory, które nie są przestrzenne, nazywają się czasowymi.



Rys. 1

Krzywa jest czasowa, jeśli jej wektory styczne są czasowe. Jak łatwo sprawdzić, równanie (1.1) implikuje, że  $\tau$  jest parametrem afinicznym wzdłuż geodetyk czasowych.

Następną strukturą, właściwą teorii Newtona, jest przestrzenny, kontrawariantny tensor metryczny  $h^{ij}$ . Przestrzenność oznacza tu

$$h^{ij} \tau_j = 0 \quad (1.2)$$

i powoduje, że tensor  $h$  określa kwadraty wektorów przestrzennych, ale nie czasowych. Własność ta wiąże się z tym, że w teorii Newtona nie ma wspólnej jednostki miary czasu i odległości.

Podobnie jak w geometrii Riemanna, koneksja jest metryczna względem  $h$

$$\nabla_k h^{ij} = 0 \quad (1.3)$$

Wreszcie, ostatni ogólny postulat teorii Newtona dotyczy własności koneksji i jej związku z potencjałem pola grawitacyjnego. Zakłada się, że istnieje pole skalarne  $\Phi$ , przy pomocy którego współczynniki koneksji można przedstawić w postaci

$$\Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + \tau_j \tau_k h^{il} \partial_l \Phi \quad (1.4)$$

gdzie  $\overset{\circ}{\Gamma}$  oznacza koneksję całkowalną (płaską),  $\partial_i \Phi = \partial \Phi / \partial x^i$ . Rozbicie koneksji, określone wzorem (1.4), nie jest jednoznaczne. Mianowicie, jeśli  $\Psi$  jest dowolnym rozwiązaniem równania

$$\tau_{[i} \nabla_{j]} \partial_k \Psi = 0$$

to koneksja

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i - \tau_j \tau_k h^{il} \partial_l \Psi$$

jest też całkowalna. Niejednoznaczność rozbicia koneksji na część całkowalną i część „potencjalną” odgrywa istotną rolę w newtonowskiej kosmologii [10]. Na mocy (1.4) równanie geodetyk czasowych w parametryzacji afinicznej jest postaci

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = -h^{il} \partial_l \Phi \quad (1.5)$$

Biorąc określone przedstawienie koneksji w postaci (1.4), można wybrać współrzędne  $\xi$  w  $E$  tak, aby

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i \stackrel{*}{=} 0 \quad (1.6)$$

Na mocy (1.1)–(1.4) wynika stąd

$$\partial_i \partial_j \tau \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{oraz} \quad \partial_k h^{ij} \stackrel{*}{=} 0$$

a za pomocą przekształceń liniowych, które zachowują ostatnie równania, można otrzymać

$$h^{ij} \stackrel{*}{=} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau \stackrel{*}{=} x^4 \quad (1.7)$$

Warunki (1.6) i (1.7) wyznaczają układ współrzędnych z dokładnością do obrotów przestrzennych i przekształceń Galileusza

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + V^\alpha x^4, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

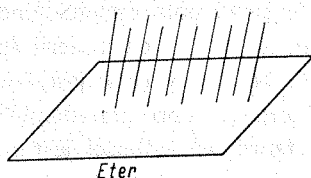
Przy użyciu takich właśnie „układów inercjalnych” rozpoczyna się każdy wykład mechaniki Newtona.

W rozdziałach poświęconych ruchom względnym i ciałom sztywnym używa się układów ogólniejszych, ograniczonych jedynie przez (1.7). W równaniu ruchu (1.5) występują wtedy człony związane z nie znikającymi składowymi koneksji  $\overset{\circ}{\Gamma}$ , które interpretuje się jako odpowiadające sile Coriolisa, sile odśrodkowej itp.

Na podstawie znajomości koneksji (1.4) można obliczyć składowe tensora krzywizny  $R^i_{jkl}$  oraz zwężonego tensora  $R_{ij} = R^k_{ijk}$ . Warunkiem na to, aby nie było pola grawitacyjnego, jest  $R^i_{jkl} = 0$ . W ogólnym przypadku, gdy istnieje pole grawitacyjne, na podstawie bezpośredniego rachunku otrzymujemy

$$R_{ij} = 0 \Leftrightarrow \Delta\Phi = 0 \quad (1.8)$$

**1.2. Elektrodynamika przedrelatywistyczna** jest teorią bogatszą od teorii Newtona. Oprócz wszystkich struktur geometrycznych właściwych czasoprzestrzeni Newtona zakłada się w tej teorii istnienie eteru, czyli „najeżenia” przestrzeni  $\tau = \text{const}$  (rys. 2). Inaczej mówiąc, eter jest to pole kierunków czasowych. Kierunki



Rys. 2

te można scharakteryzować za pomocą pola wektorowego  $u$ , unormowanego względem formy czasu absolutnego

$$u^i \tau_i = 1$$

Tensor symetryczny

$$g^{ij} = c^{-2} u^i u^j - h^{ij}$$

(gdzie  $c$  jest stałą prędkością światła) jest nieosobliwy. Oznaczając przez  $F_{ij} = -F_{ji}$  tensor pola elektromagnetycznego, równania Maxwella w próżni można napisać w postaci

$$\partial_{[i} F_{jk]} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla_j F^{ij} = 0 \quad (1.10)$$

gdzie

$$F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}$$

Założmy, że nie ma pola grawitacyjnego,  $\Gamma^i_{jk} = \overset{0}{\Gamma^i_{jk}}$ , eter jest „sztywny”:  $\nabla_i u^k = 0$  i wybierzmy układ inercjalny, związany z eterem ( $u^i \stackrel{*}{=} \delta^i_4$ ). Łatwo wtedy sprawdzić, że równania (1.9) i (1.10) sprowadzają się do równań Maxwella w znanej postaci

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{div } \mathbf{E} = 0$$

gdzie

$$c\mathbf{E} = (F_{14}, F_{24}, F_{34}), \quad \mathbf{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

**1.3. Teoria względności** opiera się na założeniu, że czasoprzestrzeń jest czterowymiarową przestrzenią Riemanna z tensorem metrycznym o sygnaturze (1,3)<sup>1)</sup>.

Jak wiadomo, przestrzeń Riemanna jest to rozmaitość różniczkowa z nieosobliwym polem metrycznym  $g_{ij}$  oraz symetryczną koneksją liniową, która jest metryczna

$$\nabla_k g^{ij} = 0$$

Dla każdego pola  $g_{ij}$  istnieje jedna taka koneksja. Widać, że teorii względności odpowiada znacznie prostsza geometria niż teorii Newtona i elektrodynamice przedrelatywistycznej. Wszystkie wielkości geometryczne w teorii Einsteina dają się wyprowadzić z pola metrycznego. Podobnie jak w teorii Newtona, znikanie tensora krzywizny jest równoważne brakowi pola grawitacyjnego. W ogólnym przypadku postuluje się, że w obszarach, gdzie nie ma materii (poza polem grawitacyjnym), obowiązuje równanie  $R_{ij} = 0$ . Na mocy (1.8) jest ono naturalnym uogólnieniem równania Laplace'a występującego w teorii grawitacji Newtona.

Struktura geometryczna teorii względności jest uboższa niż elektrodynamiki przedrelatywistycznej, w której, oprócz koneksji, współistnieją tensory metryczne  $g$  i  $h$ , eter oraz czas absolutny. Istotny krok, uczyniony przez Einsteina w 1905 roku, polegał na odrzuceniu tych trzech ostatnich elementów.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że odstęp czasu między dwoma zdarzeniami 1 i 2 dany jest w teorii Newtona przez całkę

$$\int_1^2 d\tau$$

różniczki zupełnej czasu absolutnego. W teorii Einsteina odpowiedni odstęp czasu

$$\int_1^2 ds$$

gdzie

$$c^2 ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

zależy od krzywej całkowania, tzn. od historii punktu materialnego, którego udziałem są zdarzenia 1 i 2. W podręcznikach teorii względności omawia się „paradoks bliźniąt”, który opiera się na zależności wartości całki  $\int ds$  od drogi całkowania.

<sup>1)</sup> W matematyce zwykle rezerwuje się nazwę przestrzeni Riemanna dla rozmaitości różniczkowych zaopatrzonych w pole tensora metrycznego, którego forma kwadratowa jest dodatnio określona. Niektórzy proponują, aby w przypadku sygnatury (1, 3) — lub, ogólniej, sygnatury  $(k, l)$ , gdzie  $kl \neq 0$ , mówić o przestrzeniach Lorentza. W naszym wykładzie używamy nazwy „przestrzeń Riemanna” w tym ogólniejszym znaczeniu.



## 2. Wiązki włókniste

Obecnie omówimy te podstawowe pojęcia teorii różniczkowych przestrzeni włóknistych, które będą używane w dalszych częściach wykładu.

Mając dane dwie przestrzenie topologiczne (rozmaitości różniczkowe) przez wzięcie ich iloczynu kartezjańskiego można utworzyć trzecią taką przestrzeń. Wiązka włóknista jest uogólnieniem pojęcia iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni topologicznych, a w szczególności rozmaitości różniczkowych. Uogólnienie to jest dwojakiego rodzaju. Po pierwsze, wiązka włóknista daje się *lokalnie* przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego (mówi się, że wiązka jest lokalnie trywialna). Po drugie, owych lokalnych rozkładów jest wiele i żaden z nich nie jest wyróżniony. Różne rozkłady lokalne wiążą się z sobą za pomocą działania pewnej grupy przekształceń, zwanej grupą struktury wiązki. Wiązki włókniste, które występują w lokalnej geometrii różniczkowej, są trywialne, tzn. przedstawialne jako iloczyn kartezjański. Mimo to posługiwanie się nimi w rozważaniach lokalnych jest wygodne ze względu na drugi aspekt uogólnienia, które prowadzi od iloczynów do wiązek. Wszystkie zagadnienia, które w klasycznej geometrii różniczkowej i w fizyce obejmuje się mianem niezmienniczości, stają się znacznie bardziej przejrzyste, jeśli używać języka przestrzeni włóknistych.

**2.1. Wielkości geometryczne nad przestrzenią wektorową.** Rozpocznijmy od przypomnienia pewnych pojęć i konstrukcji algebraicznych [7].

Niech  $S$  będzie  $n$ -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$ . Przez  $B(S)$  oznaczymy zbiór wszystkich baz wektorowych przestrzeni  $S$ . Każdy element  $r$  zbioru  $B(S)$  jest więc ciągiem  $(r_1, \dots, r_n)$ , składającym się z  $n$  liniowo niezależnych wektorów. Zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni  $S$  tworzy grupę  $GL(S)$ . Wiadomo, że jeśli  $A \in GL(S)$  i  $r \in B(S)$ , to

$$A(r) = (A(r_1), \dots, A(r_n)) \in B(S)$$

Grupę  $GL(n) = GL(\mathbf{R}^n)$  nazywa się grupą liniową w  $n$  wymiarach; jej elementy można utożsamiać z nieosobliwymi, rzeczywistymi macierzami  $n$ -tego stopnia. Macierz jednostkową będziemy oznaczali przez  $I$ . Dla dowolnej rzeczywistej  $n$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej  $S$  można określić prawostronne działanie<sup>1)</sup> grupy liniowej w zbiorze baz  $B(S)$  jak następuje. Niech  $a = (a_i^j) \in GL(n)$ ,  $r = (r_i) \in B(S)$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ . Definiujemy

$$\psi_a(r) = (r_j a_i^j)$$

<sup>1)</sup> Zwrot: „grupa  $G$  działa prawostronnie w zbiorze  $E$ ” oznacza, że dane jest odwzorowanie  $a \rightarrow \psi_a$  grupy  $G$  w grupę wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań  $E$  na  $E$ , spełniające  $\psi_a \circ \psi_b = \psi_{ba}$ . Podzbiór  $\kappa(x) \subset E$  nazywa się orbitą punktu  $x \in E$  lub obszarem tranzytywności grupy, jeśli  $y \in \kappa(x) \Leftrightarrow$  istnieje  $a \in G$  takie, że  $\psi_a(x) = y$ . Zbiór  $E/G = \bigcup_{x \in E} \{\kappa(x)\}$  nazywa się ilorzędem  $E$  przez  $G$ , a odwzorowanie  $\kappa : E \rightarrow E/G$ , które przyporządkowuje punktowi  $x$  jego orbitę, nazywa się odwzorowaniem kanonicznym  $E$  na  $E/G$ .

Widać od razu, że  $\psi_a$  jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny  $B(S)$  na  $B(S)$  i że dla dowolnych  $a, b \in GL(n)$

$$\psi_a \circ \psi_b = \psi_{ba}$$

gdzie  $ba$  oznacza iloczyn macierzy. Tak określone działanie  $GL(n)$  w  $B(S)$  jest jednokrotnie przechodnie:

dla każdej pary  $r, r' \in B(S)$  istnieje jedno  $a \in GL(n)$  takie, że  $r' = \psi_a(r)$ ; swobodne:

jeśli  $a \neq I$ , to  $\psi_a(r) \neq r$  dla każdego  $r \in B(S)$   
i przemienne z działaniem  $GL(S)$ :

$$\psi_a \circ A = A \circ \psi_a \quad (2.1)$$

dla dowolnego  $a \in GL(n)$  i  $A \in GL(S)$ .

Możemy teraz określić pojęcie *wielkości geometrycznej*<sup>1)</sup> nad przestrzenią wektorową  $S$ .

Niech  $\sigma$  będzie homomorfizmem grupy  $GL(n)$  w grupę  $GL(m)$ . Będziemy często pisali  $\sigma_a$  zamiast  $\sigma(a)$ . Mamy więc  $\sigma_{a^{-1}} = \sigma_a^{-1}$  oraz

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$$

W iloczynie kartezjańskim  $B(S) \times \mathbb{R}^m$  określamy prawostronne działanie grupy  $GL(n)$  jak następuje:

$$\Psi_a(r, q) = (\psi_a(r), \sigma_a^{-1}(q)) \quad (2.2)$$

gdzie  $a \in GL(n)$ ,  $r \in B(S)$ ,  $q \in \mathbb{R}^m$ . Elementy ilorazu

$$\sigma(S) = (B(S) \times \mathbb{R}^m) / GL(n)$$

nazywamy wielkościami geometrycznymi typu  $\sigma$  nad przestrzenią  $S$ . Niech  $\varkappa : B(S) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \sigma(S)$  będzie odwzorowaniem kanonicznym, to

$$\varkappa(r', q') = \varkappa(r, q) \Leftrightarrow \text{istnieje } a \in GL(n) \text{ o tej własności, że } \Psi_a(r, q) = (r', q') \quad (2.3)$$

Przez  $\varkappa_r : \mathbb{R}^m \rightarrow \sigma(S)$  będziemy oznaczali odwzorowanie częściowe („przy ustalonym  $r$ ’):  $\varkappa_r(q) = \varkappa(r, q)$ . Na mocy tego, że  $GL(n)$  działa w  $B(S)$  w sposób przechodni oraz swobodnie,  $\varkappa_r$  jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny  $\mathbb{R}^m$  na  $\sigma(S)$ . Można wprowadzić w  $\sigma(S)$  strukturę przestrzeni wektorowej nad  $\mathbb{R}$  taką, aby  $\varkappa_r$  było izomorfizmem. Widać, że wprowadzona w ten sposób struktura przestrzeni wektorowej w  $\sigma(S)$  nie zależy od wyboru bazy  $r$ .

Jeśli  $u \in \sigma(S)$ , to  $\varkappa_r^{-1}(u)$  jest ciągiem  $m$  liczb rzeczywistych, które nazywają się *składowymi* (współzrędnymi) wielkości  $u$  względem bazy  $r$ . Kładąc

$$\tilde{u}(r) = \varkappa_r^{-1}(u) \quad (2.4)$$

<sup>1)</sup> Nazwa ta została zaczerpnięta od Schoutena [6], który pisze o *geometric quantities*. Po polsku „wielkość geometryczna” nie brzmi zbyt dobrze, ale lepszej i tak ogólnej nazwy nie znamy.

przyporządkowujemy wielkości geometrycznej  $u \in \sigma(S)$  odwzorowanie  $\tilde{u} : B(S) \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Wzór

$$\tilde{u} \circ \psi_a = \sigma_a^{-1} \circ \tilde{u} \quad (2.5)$$

który jest bezpośrednią konsekwencją (2.2) i (2.3), nazywa się zwykle prawem transformacyjnym składowych wielkości geometrycznej względem zmian bazy. Jeśli  $\tilde{u} : B(S) \rightarrow \mathbf{R}^m$  jest odwzorowaniem spełniającym (2.5), to istnieje jeden element  $u \in \sigma(S)$ , dla którego zachodzi (2.4).

Możemy określić lewostronne działanie grupy  $GL(S)$  w  $\sigma(S)$  jak następuje. Niech  $A \in GL(S)$  i  $u \in \sigma(S)$ , to — na mocy (2.1) — mamy

$$\tilde{u} \circ A \circ \psi_a = \sigma_a^{-1} \circ \tilde{u} \circ A$$

Istnieje zatem element  $\sigma_A(u) \in \sigma(S)$  taki, że

$$\widetilde{\sigma_A(u)} = \tilde{u} \circ A^{-1}$$

Łatwo sprawdzić, że  $A \rightarrow \sigma_A$  jest homomorfizmem  $GL(S)$  w  $GL(\sigma(S))$ .

**Przykład 1.** Niech  $m = n$ , a  $\sigma = T$  oznacza tożsamość, tzn.

$$T_a(q) = (a_j^i q^j)$$

gdzie  $a = (a_j^i) \in GL(n)$ ,  $q = (q^j) \in \mathbf{R}^n$ . Odwzorowanie

$$\varkappa(r, q) \rightarrow r_i q^i$$

jest naturalnym izomorfizmem  $T(S)$  na  $S$ . Wielkości typu  $T$  można utożsamić z wektorami i będziemy to w dalszym ciągu robić.

**Przykład 2.** Jeśli  $\sigma : GL(n) \rightarrow GL(m)$  jest homomorfizmem, a  ${}^t b$  oznacza macierz transponowaną względem macierzy  $b$ , to odwzorowanie  $\sigma^* : GL(n) \rightarrow GL(m)$  określone przez

$$\sigma^*(a) = {}^t \sigma(a^{-1})$$

też jest homomorfizmem. Wielkości geometryczne typu  $\sigma^*$  nazywa się *kontragredientnymi* względem wielkości typu  $\sigma$ . W szczególności wielkości typu  $T^*$  nad  $S$  można utożsamić z elementami przestrzeni  $S^*$ , dualnej względem  $S$ . Istotnie, mamy

$$T_a^*(q) = (q_j a_i^{-1j})$$

gdzie  $q = (q_j) \in \mathbf{R}^m$ . Jeśli  $(r^i)$  jest bazą dualną względem  $r = (r_i)$ , to odwzorowanie

$$\varkappa(r, q) \rightarrow r^i q_i$$

jest izomorfizmem  $T^*(S)$  na  $S^*$ . W dalszym ciągu wartość formy  $\omega \in S^*$  na wektorze  $v \in S$  będziemy często oznaczali przez  $\langle v, \omega \rangle$ . W szczególności, mamy

$$\langle r_i, r^j \rangle = \delta_i^j$$

**Przykład 3.** Niech  $m = 1$  oraz

$$\sigma_a = (\det a)^w, \quad w = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wielkości tego typu nazywają się gęstościami skalarnymi o wadze  $w$ .

Algebrę Grassmanna [3] przestrzeni wektorowej  $S$  oznaczymy przez  $\bigwedge(S)$ . Umawiając się, że  $\bigwedge^0 S = \mathbf{R}$  i  $\bigwedge^1 S = S$ , można ją przedstawić w postaci sumy prostej

$$\bigwedge(S) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k S, \quad n = \dim S$$

iloczynów zewnętrznych  $S$ . Iloczyn zewnętrzny  $\bigwedge^k S$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) utożsamiamy z ilorzem

$$\bigotimes^k S / N_k$$

gdzie  $N_k \subset \bigotimes^k S$  jest podprzestrzenią tensorów o znikających częściach antysymetrycznych. Elementy przestrzeni  $\bigwedge^k S$  i  $\bigwedge^k S^*$  nazywa się odpowiednio  $k$ -wektorami i  $k$ -formami. Obraz tensora  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  przy odwzorowaniu kanonicznym  $\bigotimes^k S \rightarrow \bigwedge^k S$  oznacza się przez  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  i nazywa iloczynem zewnętrznym wektorów  $v_1, \dots, v_k \in S$ .  $k$ -wektor, który jest iloczynem zewnętrznym wektorów, nazywa się  $k$ -wektorem rozkładalnym.

Dla każdego  $A \in GL(S)$  istnieje  $\bigwedge^k A \in GL(\bigwedge^k S)$  określone przez

$$\left(\bigwedge^k A\right)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = A(v_1) \wedge \dots \wedge A(v_k)$$

oraz  $\bigwedge(A) \in GL(\bigwedge(S))$ , które definiuje się za pomocą wzoru

$$\bigwedge(A) \left( \sum_{k=0}^n z_k \right) = \sum_{k=0}^n \left( \bigwedge^k A \right) (z_k), \quad z_k \in \bigwedge^k S$$

Określone w ten sposób odwzorowanie

$$\bigwedge : GL(n) \rightarrow GL(2^n) \tag{2.6}$$

jest homomorfizmem, a stosowana przez nas notacja jest wewnętrznie zgodna. Mianowicie, przestrzeń wielkości typu  $\bigwedge$  nad  $S$  jest w naturalny sposób izomorficzna z przestrzenią  $\bigwedge(S)^1$ . Niech  $z = \sum_{k=0}^n z_k$ ,  $z_k \in \bigwedge^k S$ . Odwzorowanie  $K$  algebry

<sup>1)</sup> Czytelnik może zechcieć uporządkować materiał zawarty w niniejszym paragrafie przy pomocy pojęć teorii kategorii.

$\bigwedge(S)$  w siebie, określone przez  $K(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k z_k$  jest *inwolucją*, tzn. automorfizmem algebry takim, że  $K \circ K = \text{id}$ . Przestrzenie  $\bigwedge^k S$  i  $\bigwedge^k S^*$  są w relacji dwoistości ze względu na formę biliniową

$$\bigwedge^k S \times \bigwedge^k S^* \ni (z, z^*) \rightarrow \langle z, z^* \rangle \in \mathbf{R}$$

określoną dla elementów rozkładalnych przez

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \rangle = \det \langle v_i, \omega_j \rangle$$

Jeśli  $v \in S$  i  $z^* \in \bigwedge^k S^*$ , to istnieje jedno  $v \lrcorner z^* \in \bigwedge^{k-1} S^*$  takie, że

$$\langle z, v \lrcorner z^* \rangle = \langle v \wedge z, z^* \rangle$$

dla każdego  $z \in \bigwedge^{k-1} S$ . Przestrzenie  $\bigwedge^*(S)$ ,  $\bigwedge^*(S^*)$  i  $\bigwedge(S)^*$  można w naturalny sposób utożsamić.

**2.2. Rozmaitości różniczkowe.** Przypomnijmy obecnie podstawowe pojęcia dotyczące rozmaitości różniczkowych. Niech  $E$  będzie przestrzenią Hausdorffa o przeliczalnej bazie. Mapą tej przestrzeni nazywamy każdą trójkę  $(V, \xi, n)$  taką, że  $E \supset V$  jest zbiorem otwartym, a  $\xi$  jest homeomorfizmem  $V$  na pewien otwarty podzbiór przestrzeni  $\mathbf{R}^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Zbiór  $V$  nazywa się dziedziną mapy. Rodzina map, których dziedziny pokrywają przestrzeń, nazywa się atlasem tej przestrzeni. Rozmaitość jest to spójna, posiadająca atlas przestrzeń Hausdorffa  $E$ . Na mocy spójności  $E$  liczba całkowita  $n$  jest jednakowa dla wszystkich map i nazywa się wymiarem  $E$ . W związku z tym będziemy w dalszym ciągu mówili o mapie  $(V, \xi)$  zamiast  $(V, \xi, n)$ . Dwie mapy  $(V, \xi)$  i  $(W, \eta)$  nazywają się zgodnymi, jeśli  $\eta \circ \xi^{-1}$  i  $\xi \circ \eta^{-1}$  są funkcjami klasy  $\mathcal{C}^\infty$  na  $\xi(V \cap W)$  i  $\eta(V \cap W)$ , odpowiednio. Rozmaitość, która posiada wyróżniony, maksymalny atlas parami zgodnych map, nazywa się *rozmaitością różniczkową* (klasy  $\mathcal{C}^\infty$ ). Na przykład, przestrzenie  $\mathbf{R}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mają naturalną strukturę rozmaitości różniczkowych. Mapy należące do wyróżnionego atlasu maksymalnego nazywają się dopuszczalnymi. W dalszym ciągu będziemy mówili tylko o takich mapach.

Odwzorowanie  $h$   $n$ -wymiarowej rozmaitości różniczkowej  $E$  w  $m$ -wymiarową rozmaitość różniczkową  $F$  nazywa się różniczkowalnym, jeśli dla każdej pary map:  $(V, \xi)$  w  $E$  i  $(W, \eta)$  w  $F$  odwzorowanie  $\eta \circ h \circ \xi^{-1}: \xi(V) \rightarrow \eta(W)$  jest różniczkowalne. Odwzorowanie  $h$ , wzajemnie jednoznaczne i takie, że  $h$  i  $h^{-1}$  są różniczkowalne, nazywa się *izomorfizmem różniczkowalnym*<sup>1)</sup>. W dalszym ciągu nie będziemy

<sup>1)</sup> Używa się również nazw dyfeomorfizm albo dyferomorfizm. Są to, naszym zdaniem, niezbyt udane neologizmy.

zajmowali się różniczkowalnymi innymi niż różniczkowe ani odwzorowaniami nieróżniczkowalnymi. W związku z tym, bez obawy o nieporozumienie, będziemy często opuszczali przymiotniki: różniczkowy i różniczkowalny. Zbiór funkcji różniczkowalnych  $E \rightarrow \mathbf{R}$  będziemy oznaczali przez  $\mathcal{C}(E)$ . Odwzorowanie  $v : \mathcal{C}(E) \rightarrow \mathbf{R}$  nazywamy *wektorem stycznym* do  $E$  w punkcie  $p \in E$ , jeśli jest ono liniowe:

$$v(a\lambda + b\mu) = av(\lambda) + bv(\mu)$$

gdzie  $a, b \in \mathbf{R}$  i  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}(E)$ , oraz spełnia regułę Leibniza,

$$v(\lambda\mu) = \lambda(p)v(\mu) + \mu(p)v(\lambda)$$

Dowodzi się, że  $v(\lambda) = 0$ , jeśli  $\lambda = 0$  w pewnym otoczeniu  $p$ . W związku z tym można obliczać wartość  $v$  na funkcjach różniczkowalnych, określonych jedynie w pewnym otoczeniu  $p$ , np. na funkcjach  $\xi^i$ , odpowiadających mapie  $(V, \xi)$ , której dziedzina zawiera  $p$ . Zbiór  $T_p(E)$  wektorów stycznych do  $E$  w  $p$  jest przestrzenią wektorową; dowodzi się, że jest ona  $n$ -wymiarowa, jeśli wymiar  $E$  wynosi  $n$ . Jeśli  $q : \mathbf{R} \rightarrow E$  jest różniczkowalna i  $-\infty < a < b < +\infty$ , to  $q([a, b])$  nazywa się krzywą. Każdemu punktowi  $q(t_0)$  krzywej odpowiada wektor styczny  $v$  określony przez

$$v(\lambda) = \left( \frac{d}{dt} \lambda \circ q \right)_{t=t_0}$$

Każdemu punktowi  $p$  należącemu do dziedziny  $V$  mapy  $(V, \xi)$  można przyporządkować pewną bazę  $e(p)$  przestrzeni  $T_p(E)$ , zwaną bazą naturalną względem tej mapy. Wektory tej bazy są styczne do linii współrzędnych układu współrzędnych  $\xi = (\xi^i)$ . Można je określić podając wartości tych wektorów na funkcjach  $\xi^i$ :

$$e_i(p) (\xi^j) = \delta_i^j$$

Znajdziemy bazę dualną  $(e^i(p))$  względem bazy naturalnej. Niech  $\lambda \in \mathcal{C}(E)$ , określamy  $d\lambda(p) \in T_p(E)^*$  wzorem

$$\langle v, d\lambda(p) \rangle = v(\lambda), \quad \text{gdzie } v \in T_p(E) \quad (2.7)$$

Widać od razu, że

$$e^i = d\xi^i \quad (2.8)$$

Każde  $\omega \in T_p(E)^*$  można zapisać w postaci  $\omega = \omega_i d\xi^i(p)$ ; w związku z tym elementy  $T_p(E)^*$  nazywa się *formami różniczkowymi*.

Odwzorowaniu różniczkowalnemu  $h : E \rightarrow F$  odpowiada homomorfizm  $T_p(E)$  w  $T_{h(p)}(F)$ , który będziemy oznaczali przez  $h'$  i nazywaliśmy odwzorowaniem stycznym do  $h$ . Jest ono zdefiniowane przez

$$(h'v)(\lambda) = v(\lambda \circ h), \quad v \in T_p(E), \quad \lambda \in \mathcal{C}(F)$$

gdzie, ze względów graficznych, napisaliśmy  $h'v$  zamiast  $h'(v)$ . Homomorfizm sprzę-

żony (transponowany) względem odwzorowania stycznego  $h'$  będziemy oznaczali przez  $h^*$ ,

$$\langle v, h^* \omega \rangle = \langle h' v, \omega \rangle, \quad v \in T_p(E), \quad \omega \in T_{h(p)}(F)^*$$

Widać, że

$$d(\lambda \circ h) = h^* d\lambda$$

Rodzinę  $(p_t)_{t \in \mathbf{R}}$  odwzorowań  $p_t : E \rightarrow E$  nazywamy jednoparametrową grupą przekształceń rozmaitości  $E$ , jeśli

$$\mathbf{R} \times E \ni (t, p) \rightarrow p_t(p) \in E$$

jest odwzorowaniem różniczkowalnym,

$$p_0 = \text{id} \quad \text{oraz} \quad p_t \circ p_s = p_{t+s}$$

dla każdych  $t, s \in \mathbf{R}$ . Wynika stąd, że dla każdego  $t \in \mathbf{R}$ ,  $p_t$  jest izomorfizmem różniczkowalnym  $E$  na  $E$ , a  $p_{-t}$  jest izomorfizmem odwrotnym względem  $p_t$ . Krzywe  $t \rightarrow p_t(p)$ ,  $p \in E$ , nazywają się trajektoriami grupy, a pole wektorowe, styczne do trajektorii, polem wektorowym indukowanym przez grupę. Wiadomo, że na odwrót, każdemu polu wektorowemu na  $E$  odpowiada lokalna, jednoparametrowa grupa przekształceń lokalnych rozmaitości  $E$ .

**2.3. Wiązka baz rozmaitości różniczkowej.** Niech  $E$  będzie  $n$ -wymiarową rozmaitością różniczkową,  $T_p$  — przestrzenią styczną do  $E$  w punkcie  $p$ . Rozpatrzmy zbiór

$$B(E) = \bigcup_{p \in E} B(T_p)$$

wszystkich baz przestrzeni stycznych do rozmaitości  $E$ . Działanie grupy  $GL(n)$ , określone na każdym  $B(T_p)$ , jest tym samym określone na  $B(E)$ . Będziemy je również oznaczali symbolem  $\psi$ . Dla każdego  $r \in B(E)$  istnieje jeden punkt  $p = \pi(r) \in E$  taki, że  $r$  jest bazą  $T_p$ . Mamy więc określone odwzorowanie (rzut)  $\pi$  zbioru  $B(E)$  na  $E$ . Niech  $(V, \xi)$  będzie mapą rozmaitości  $E$ . Przyporządkujemy jej odwzorowanie  $\pi^{-1}(\xi)$  zbioru  $\pi^{-1}(V)$  w  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n^2}$ ,

$$\pi^{-1}(V) \ni r \xrightarrow{\pi^{-1}(\xi)} (\xi^i \circ \pi(r), \langle r_j, e^k \circ \pi(r) \rangle) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n^2}$$

Pokazuje się, że istnieje topologia i struktura różniczkowa w  $B(E)$ , dla której zbiór par  $(\pi^{-1}(V), \pi^{-1}(\xi))$  stanowi atlas map dopuszczalnych. Względem tak zdefiniowanej struktury różniczkowej zbioru  $B(E)$  odwzorowania  $\pi : B(E) \rightarrow E$  i  $\psi : GL(n) \times B(E) \rightarrow B(E)$  są różniczkowalne (grupa liniowa ma naturalną strukturę różniczkową zgodną z działaniami grupowymi, tzn. jest grupą Liego). Rozmaitość  $B(E)$  nazywa się *wiązką baz* rozmaitości  $E$ . Grupa  $GL(n)$  jest jej grupą struktury. Dla każdego  $p \in E$  zbiór  $\pi^{-1}(p) = B(T_p) \subset B(E)$  jest domkniętą podrozmaitością; nazywa się ją *włóknem* nad  $p$ . Wiązka jest więc sumą włókien.

Niech  $V \subset E$  będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie  $e : V \rightarrow B(E)$  takie, że  $\pi \circ e = \text{id}$  nazywa się *przekrojem lokalnym* (nad  $V$ ) wiązki  $B(E)$ . Przekroje lokalne istnieją; aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć jako  $V$  dziedzinę pewnej mapy  $(V, \xi)$  a jako  $e$  — odwzorowanie, przyporządkowujące punktowi  $p \in V$  bazę naturalną zaczepioną w tym punkcie i odpowiadającą lokalnym współrzędnym  $\xi$ . Jeśli  $e$  jest przekrojem lokalnym nad  $V$ , a  $h : V \rightarrow GL(n)$  odwzorowaniem, to  $p \rightarrow \psi_{h(p)} \circ e(p)$  też jest przekrojem lokalnym i każdy przekrój można w ten sposób otrzymać.

Niech  $e : V \rightarrow B(E)$  będzie przekrojem lokalnym, to

$$\pi^{-1}(V) \ni r \rightarrow (\pi(r), \langle r_j, e^k \circ \pi(r) \rangle) \in V \times GL(n) \quad (2.9)$$

jest izomorfizmem różniczkowalnym, którego istnienie wyraża lokalną trywialność wiązki  $B(E)$ : „niewielka” jej część  $\pi^{-1}(V)$  jest izomorficzna iloczynowi kartezjańskiemu. W związku z tym, że przekrojów jest dużo, istnieje również wiele rozkładów lokalnych postaci (2.9) i żadne z nich nie są wyróżnione, chyba że rozmaitość  $E$  posiada dodatkowe struktury.

Łatwo jest skonstruować rozmaitość różniczkową składającą się z wielkości geometrycznych typu  $\sigma$ , „zaczepionych” we wszystkich punktach  $n$ -wymiarowej rozmaitości  $E$ . Niech  $\sigma : GL(n) \rightarrow GL(m)$  będzie homomorfizmem różniczkowalnym. Tworzymy najpierw sumę mnogościową

$$\sigma(E) = \bigcup_{p \in E} \sigma(T_p)$$

Jeśli  $u \in \sigma(E)$ , to istnieje  $p \in E$  takie, że  $u \in \sigma(T_p)$ ; kładziemy  $p = \varrho(u)$  i nazywamy odwzorowanie  $\varrho : \sigma(E) \rightarrow E$  rzutem. Niech  $(V, \xi)$  będzie mapą,  $e$  — odpowiadającym jej przekrojem lokalnym wiązki baz; określamy odwzorowanie  $\varrho^{-1}(V) \ni u \xrightarrow{e^{-1}(\xi)} (\xi \circ \varrho(u), \tilde{u} \circ e \circ \varrho(u)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  i wprowadzamy w  $\sigma(E)$  topologię i strukturę różniczkową takie, aby zbiór par  $(\varrho^{-1}(V), \varrho^{-1}(\xi))$ , gdy  $(V, \xi)$  przebiega atlas rozmaitości  $E$ , był atlasem map dopuszczalnych rozmaitości  $\sigma(E)$ . Odwzorowanie różniczkowalne  $\varphi : V \rightarrow \sigma(E)$  takie, że  $\varrho \circ \varphi = \text{id}$ , nazywa się *przekrojem lokalnym*. Przekrój lokalny jest więc *polem* wielkości geometrycznej typu  $\sigma$ , określonym na  $V$ . Mając dany przekrój  $\varphi : V \rightarrow \sigma(E)$  możemy określić odwzorowanie  $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbf{R}^m$  kładąc

$$\tilde{\varphi}(r) = \kappa_r^{-1} \circ \varphi \circ \pi(r)$$

Na mocy (2.5) mamy

$$\tilde{\varphi} \circ \psi_a = \sigma_a^{-1} \circ \tilde{\varphi} \quad (2.10)$$

Niech  $e$  będzie polem baz naturalnych, odpowiadającym mapie  $(V, \xi)$ . Odwzorowanie

$$f = \tilde{\varphi} \circ e \circ \xi^{-1} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m \quad (2.11)$$

nazywa się wyrażeniem pola  $\varphi$  przez współrzędne lokalne  $\xi$  w  $V$ . Jeśli  $\bar{x} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  jest izomorfizmem różniczkowalnym („przekształcenie współrzędnych”) i  $\bar{\xi} = \bar{x} \circ \xi$ ,



to  $(V, \bar{\xi})$  też jest mapą. Oznaczając przez  $\bar{e}$  odpowiadające tej mapie pole baz naturalnych, wprowadzając wyrażenie pola  $\varphi$  przez współrzędne lokalne  $\bar{\xi}$ ,

$$\bar{f} = \tilde{\varphi} \circ \bar{e} \circ \xi^{-1} \quad (2.12)$$

biorąc pod uwagę (2.10) i prawo transformacji baz

$$e(p) = \psi_{\bar{x}} \circ \bar{e}(p), \quad \text{gdzie } \bar{x}' = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \circ \xi(p) \quad (2.13)$$

możemy napisać regułę przekształceń

$$\bar{f}(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}} \circ f(x), \quad \text{gdzie } x = \xi(p), \quad \bar{x} = \bar{\xi}(p) \quad (2.14)$$

W dalszym ciągu, ze względu na wyrażnie lokalny charakter prowadzonych tu rozważań, nie będziemy tej lokalności stale podkreślać. Będziemy więc mówili o mapach i przekrojach nie precyzując ich dziedzin albo wręcz zakładając, że dziedziny te pokrywają się z całą rozmaiłością.

**2.4. Główna wiązka włóknista. Wiązki stowarzyszone** [4, 7]. Główna wiązka włóknista stanowi uogólnienie pojęcia wiązki baz. Mówimy, że  $P$  jest (różniczkową) główną wiązką włóknistą nad bazą  $E$  i o grupie struktury  $G$ , jeśli:

- (a)  $P$  i  $E$  są rozmaiłościami różniczkowymi, a  $G$  — grupą Liego;
- (b) dany jest różniczkowalny rzut  $\pi$  wiązki  $P$  na bazę  $E$  (podprzestrzenie  $G_p = \pi^{-1}(p) \subset P$ ,  $p \in E$ , nazywają się włóknami);
- (c)  $G$  działa w  $P$  prawostronnie

$$G \times P \ni (a, r) \rightarrow \psi_a(r) \in P, \quad \psi_a \circ \psi_b = \psi_{ba}$$

swobodnie i różniczkowalnie, a włókna są obszarami tranzytywności grupy;

(d)  $P$  jest lokalnie trywialna, tzn. dla każdego  $p \in E$  istnieje otwarte otoczenie  $V$  oraz izomorfizm różniczkowalny  $\eta : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ , zwany rozkładem lokalnym, taki, że

$$\eta(r) = (\pi(r), \chi(r)) \quad \text{i} \quad \chi \circ \psi_a(r) = \chi(r)a$$

dla  $r \in \pi^{-1}(V)$ ,  $a \in G$ .

Z definicji  $P$  wynika, że włókna są domkniętymi podrozmaiłościami, a odwzorowanie  $\psi_r : G \rightarrow G_{\pi(r)}$ , określone przez  $\psi_r(a) = \psi_a(r)$ , jest izomorfizmem różniczkowalnym  $G$  na  $G_{\pi(r)}$ .

Niech  $F$  będzie rozmaiłością różniczkową, w której grupa  $G$  działa lewostronnie

$$G \times F \ni (a, q) \rightarrow \sigma_a(q) \in F, \quad \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$$

W iloczynie  $P \times F$  wprowadzamy prawostronne działanie  $G$  w sposób określony wzorem (2.2), definiujemy iloraz  $M = (P \times F)/G$ , odwzorowanie kanoniczne

$\kappa : P \times F \rightarrow M$  oraz rzut  $\varrho : M \rightarrow E$  kładąc  $\varrho \circ \kappa(r, q) = \pi(r)$ . Odwzorowanie częściowe  $\kappa_r$  przekształca wzajemnie jednoznacznie  $F$  na włókno  $F_p = \varrho^{-1}(p)$ , gdzie  $p = \pi(r)$ . Jeśli  $\eta : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times G$  jest rozkładem lokalnym wiązki  $P$ , to  $\eta^{-1}(p, ab) = \psi_b \circ \eta^{-1}(p, a)$ , zatem  $\vartheta(p, q) = \kappa(\eta^{-1}(p, a), \sigma_a^{-1}(q))$  naprawdę nie zależy od  $a \in G$ . Odwzorowanie  $\vartheta : V \times F \rightarrow \varrho^{-1}(V)$  jest wzajemnie jednoznaczne i można wprowadzić w  $M$  topologię i strukturę różniczkową w ten sposób, aby  $\vartheta$  było izomorfizmem różniczkowalnym dla każdego rozkładu lokalnego  $\eta$  wiązki  $P$ . Określona w ten sposób rozmierność różniczkowa  $M$  nazywa się wiązką włóknistą o włóknie typowym  $F$ , stowarzyszoną z główną wiązką  $P$  nad  $E$ .

W szczególności, jeśli  $P = B(E)$ ,  $F = \mathbb{R}^m$  i  $\sigma : GL(n) \rightarrow GL(m)$  jest homomorfizmem, to  $M$  można utożsamiać z  $\sigma(E)$ . W związku z tym mówimy, że  $\sigma(E)$  jest wiązką wielkości geometrycznych typu  $\sigma$ ; jest to wiązka stowarzyszona z główną wiązką baz. Zbiór  $C\sigma(E)$  przekrojów wiązki  $\sigma(E)$  posiada naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. W szczególności, przez  $T(E)$  i  $T^*(E)$  oznacza się, odpowiednio, wiązkę wektorów stycznych i form różniczkowych. Przekroje tych wiązek nazywają się polami wektorowymi i polami form. Na przykład, funkcji różniczkowalnej  $\lambda \in C(E)$  odpowiada pole form  $d\lambda \in CT^*(E)$  określone przez (2.7). Ze względów językowych mówi się czasem o formach, mimo że ma się na myśli pola form.

Rozpatrzmy wiązkę  $\bigwedge^*(E)$ , stowarzyszoną z  $B(E)$  i odpowiadającą homomorfizmowi  $\bigwedge^*$ , określone przez (2.6). Zbiór  $C \bigwedge^*(E)$  przekrojów tej wiązki posiada strukturę algebry: jeśli  $\omega, \omega' \in C \bigwedge^*(E)$ , to  $\omega \wedge \omega'$  jest określone przez

$$(\omega \wedge \omega')(p) = \omega(p) \wedge \omega'(p)$$

dla każdego  $p \in E$ . Algebrę tę nazywa się *algebrą Cartana* rozmierności  $E$ . Widać od razu, w jaki sposób można przenieść inwolucję  $K$ , określoną w  $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$  do  $C \bigwedge^*(E)$ .

Algebra Cartana jest generowana przez  $C \overset{0}{\bigwedge}^*(E) = \mathcal{C}(E)$  i  $C \overset{1}{\bigwedge}^*(E) = CT^*(E)$ . Istnieje jedno odwzorowanie liniowe  $d$  algebry Cartana w siebie, które jest anty-różniczkowaniem względem  $K$ ,

$$d(\omega \wedge \omega') = (d\omega) \wedge \omega' + (K\omega) \wedge d\omega', \quad d \circ K + K \circ d = 0$$

spełnia

$$d \circ d = 0$$

oraz jest rozszerzeniem odwzorowania

$$d : C \overset{0}{\bigwedge}^*(E) \rightarrow C \overset{1}{\bigwedge}^*(E)$$

określonego przez (2.7). Tak określone odwzorowanie  $d$  nazywa się *różniczką zewnętrzną*.

Podobnie do tego, jak określa się odpowiedniość między przekrojami wiązki wielkości geometrycznych typu  $\sigma$  oraz odwzorowaniami  $B(E) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , spełniającymi (2.10), można określić odpowiedniość między przekrojami  $E \rightarrow M$  oraz odwzorowaniami  $P \rightarrow F$ , również spełniającymi (2.10).

Niech  $P$  będzie wiązką główną nad  $E$ , o grupie struktury  $G$ ,  $M$  — wiązką stowarzyszoną z  $P$ , o włóknie typowym  $F = \mathbf{R}^m$ . Włókna wiązki  $M$  oraz zbiór  $C(M)$  jej przekrojów są w tym przypadku przestrzeniami wektorowymi. Każdy wektor  $v \in T_r(P)$ , który jest styczny do włókna  $G_{\pi(r)}$ , tzn. taki, że  $\pi'v = 0$ , będziemy nazywali wektorem pionowym. Przestrzeń wektorów pionowych stycznych do  $P$  w punkcie  $r$  będziemy oznaczali przez  $V_r$ . Pole  $\tilde{\alpha}$   $k$ -form określonych na  $P$ , o wartościach w  $F$ , nazywamy polem  $k$ -form typu  $\sigma$ , jeśli

$$\text{dla każdego } v \in V_r \text{ zachodzi } v \lrcorner \tilde{\alpha}_r = 0 \quad (2.15)$$

oraz

$$\text{dla każdego } a \in G \text{ zachodzi } \psi_a^* \tilde{\alpha} = \sigma_a^{-1} \circ \tilde{\alpha} \quad (2.16)$$

Dowolnemu polu  $\tilde{\alpha}$   $k$ -form typu  $\sigma$  odpowiada pole  $k$ -form  $\alpha$ , określone na  $E$ , o wartościach w  $M$  i takie, że

$$p \rightarrow \langle X_1 \wedge \dots \wedge X_k, \alpha_p \rangle \quad (2.17)$$

jest przekrojem wiązki  $M$  dla dowolnych pól wektorowych  $X_1, \dots, X_k$  na  $E$ . Mianowicie, wystarczy położyć

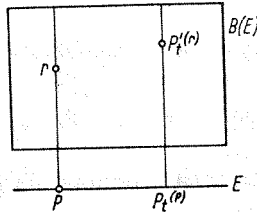
$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, \alpha_p \rangle = \varkappa_r(\langle \bar{u}_1 \wedge \dots \wedge \bar{u}_k, \tilde{\alpha}_r \rangle) \quad (2.18)$$

gdzie  $r \in G_p$ , a wektory  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \in T_r(P)$  są takie, że  $\pi' \bar{u}_i = u_i \in T_p(E)$ . Na mocy warunków (2.15) i (2.16) lewa strona równości (2.18) jest dobrze określona. Odwrotnie, każdemu polu  $\alpha$  form, określone na  $E$ , o wartościach w  $M$  i takiemu, że (2.17) jest przekrojem wiązki  $M$ , można przyporządkować pole  $\tilde{\alpha}$  form typu  $\sigma$ , dla którego zachodzi (2.18). Odpowiedniość ta jest uogólnieniem poprzednio opisanej odpowiedniości między przekrojami  $\varphi : E \rightarrow M$  i odwzorowaniami  $\tilde{\varphi} : P \rightarrow F$ . Te ostatnie odwzorowania są 0-formami typu  $\sigma$ .

**2.5. Pochodna Liego.** Wprowadzimy teraz pojęcie pochodnej Liego pola wielkości geometrycznej typu  $\sigma$ . Aby uczynić wykład nieco lżejszym, będziemy zakładali, że rozpatrywane przekroje, mapy i grupy przekształceń są określone globalnie na całej rozmaitości  $E$ . Wiadomo, że pochodna Liego jest naprawdę pojęciem lokalnym.

Niech  $(p_t)$  będzie jednoparametrową grupą przekształceń rozmaitości  $E$ . Odwzorowanie  $p'_t$ , styczne względem  $p_t$ , jest izomorfizmem  $T_q(E)$  na  $T_{p_t(q)}(E)$ . Jeśli  $r = (r_i) \in B(E)$ , to określamy bazę  $p'_t(r) = (p'_t(r_i))$  i w ten sposób „dźwigamy” grupę przekształceń do wiązki baz (rys. 3). Na mocy (2.1) mamy  $\psi_a \circ p'_t = p'_t \circ \psi_a$ ; oczywiście,  $\pi \circ p'_t = p_t \circ \pi$ . Niech  $\varphi : E \rightarrow \sigma(E)$  będzie przekrojem, to  $\tilde{\varphi} \circ p'_t$  odpowiada pewnemu przekrojowi  $\varphi_t$ , tzn.  $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi} \circ p'_t$ . Mówimy, że pole  $\varphi_t$  powstało z  $\varphi$  przez *przeniesienie* za pomocą izomorfizmu różniczkowalnego  $p_t$ . Dla każdego  $r \in B(E)$

odwzorowanie  $\mathbf{R} \ni t \rightarrow \tilde{\varphi}_t(r) \in \mathbf{R}^m$  jest różniczkowalne i można obliczyć  $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}_t(r) = \frac{d\tilde{\varphi}_t}{dt}(r)$ . Łatwo zauważyć, że  $\frac{d\tilde{\varphi}_t}{dt}$  spełnia (2.10). Pochodnej  $\frac{d\tilde{\varphi}_t}{dt} \Big|_{t=0}$  odpowiada zatem przekrój  $E \rightarrow \sigma(E)$ , zwany *pochodną Liego*  $\varphi$  względem pola wektorowego indukowanego przez grupę  $(p_t)$ .



Rys. 3

W praktycznych rachunkach posługujemy się najczęściej wyrażeniami pól przez współrzędne (patrz ustęp 3). Niech  $\xi$  będzie układem współrzędnych w  $E$ ,  $e : E \rightarrow B(E)$  — odpowiadającym mu polem baz naturalnych. Przekrój  $\varphi : E \rightarrow \sigma(E)$ , wyrażony przez współrzędne, wynosi

$$f = \tilde{\varphi} \circ e \circ \xi^{-1}$$

a pochodna Liego

$$\mathcal{L}_X f = \frac{d\tilde{\varphi}_t}{dt} \Big|_{t=0} \circ e \circ \xi^{-1} = \left( \frac{d}{dt} \tilde{\varphi} \circ p_t' \circ e \circ \xi^{-1} \right) \Big|_{t=0} \quad (2.19)$$

gdzie  $X$  oznacza pole indukowane przez grupę  $(p_t)$  i wyrażone przez współrzędne.

### 3. Koneksje i elektrodynamika

Przedstawimy obecnie pewien model geometryczny elektrodynamiki, którego autorem jest UTIYAMA [12]. Teoria Utiyamy różni się w istotny sposób od jednolitych teorii pola, które miały za cel połączenie zjawisk elektromagnetycznych z grawitacyjnymi. Model Utiyamy jest ściśle równoważny elektrodynamice w jej zwykłym sformułowaniu. Zaletą jego jest to, że w języku geometrycznym daje precyzyjne odpowiedzi na pytania, czym są potencjały, pola elektromagnetyczne i niezmienniczość cechowania oraz pozwala łatwo rozstrzygnąć kontrowersje, które powstały w związku z doświadczeniami zaproponowanymi przez Bohma i Aharonowa.

Czytelnik, znający teorię koneksji w wiązках głównych i nie interesujący się szczegółami modelu Utiyamy, może zadowolnić się następującym stwierdzeniem: pole elektromagnetyczne jest formą krzywizny koneksji w wiązce głównej, której bazą jest riemannowska czasoprzestrzeń, a grupą struktury — jednowymiarowy torus.

**3.1. Koneksje w wiązce głównej.** Ważnym przykładem rozmaitości różniczkowej jest rzeczywista przestrzeń afiniczna. Zbiór  $E$  nazywamy przestrzenią afiniczną nad przestrzenią wektorową  $S$ , jeśli określone jest działanie grupy abelowej  $S$  w  $E$

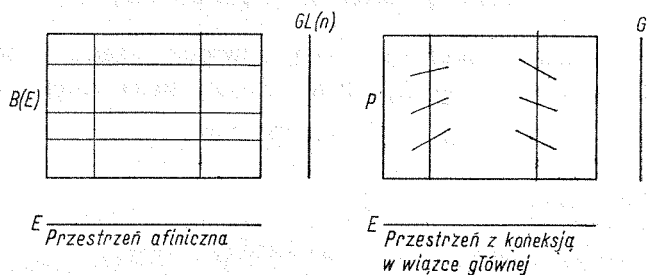
$$S \times E \ni (u, p) \rightarrow u+p \in E$$

$$u+(v+p) = (u+v)+p, \quad \text{gdzie } u, v \in S$$

które jest swobodne i przechodnie. Jeśli przestrzeń  $S$  jest  $n$ -wymiarowa rzeczywista,  $e = (e_i)$  jest jej bazą i  $o \in E$ , to każdy punkt  $p \in E$  można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$p = e_i x^i(p) + o, \quad x^i(p) \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

Para  $(o, e)$  nazywa się bazą afiniczną, a liczby  $x^i(p)$  — współrzędnymi  $p$  względem tej bazy. Odwzorowanie  $x : E \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $x(p) = (x^i(p))$ , jest wzajemnie jednoznaczne; wprowadzamy topologię i strukturę różniczkową w  $E$  żądając, aby  $x$  było izomorfizmem różniczkowalnym; struktury te nie zależą od wyboru bazy afinicznej. Przestrzenie styczne  $T_p(E)$  można w naturalny sposób utożsamić z  $S$ : wystarczy utożsamić wektory bazy naturalnej względem mapy  $(E, x)$  z odpowiednimi wektorami bazy  $e$  przestrzeni  $S$ . W związku z tym można porównywać wektory styczne zaczeplone w różnych punktach  $E$  i mówić o ich równoległym przenoszeniu. Dla każdej bazy  $r \in B(T_p)$  istnieje na  $E$  pole baz — czyli przekrój globalny wiązki baz  $B(E)$  — składające się z baz, które powstają przez równoległe przeniesienie  $r$  (rys. 4).



Rys. 4

Wiązka  $B(E)$  jest globalnie trywialna i w naturalny sposób można ją utożsamić z iloczynem  $E \times B(S)$ .

Niech  $h_r : E \rightarrow B(E)$  będzie przekrojem wiązki baz przestrzeni afinicznej  $E$ , zawierającym bazę  $r$ , tzn. takim, że  $h_r \circ \pi(r) = r$ . Zbiór  $h_r(E)$  ma naturalną strukturę podrozmaitości i można wprowadzić przestrzenie styczne  $H_r = T_r(h_r(E)) \subset T_r(B(E))$ . Na mocy tego, że  $h_r$  jest przekrojem,  $\pi \circ h_r = \text{id}$ , mamy

$$\pi'(H_r) = T_{\pi(r)}(E) \tag{3.1}$$

Oczywista równość  $\psi_a \circ h_r = h_{\psi_a(r)}$ , gdzie  $a \in GL(n)$  implikuje

$$\psi'_a(H_r) = H_{\psi_a(r)} \tag{3.2}$$

Własność przestrzeni afinicznej uogólnia się wprowadzając pojęcie *koneksji w wiązce głównej*. Niech  $P$  będzie wiązką główną nad bazą  $E$ , o grupie struktury  $G$ . Działanie  $G$  w  $P$  oraz rzut  $P \rightarrow E$  będziemy oznaczali tymi samymi symbolami co poprzednio. Mówimy, że w  $P$  jest określona koneksja (powiązanie), jeśli dane jest w  $P$  pole elementów liniowych, tzn. odwzorowanie

$$P \ni r \rightarrow H_r \subset T_r(P)$$

gdzie  $H_r$  jest podprzestrzenią wektorową, spełniające (3.1) i (3.2) oraz różniczkowalne. Ten ostatni warunek oznacza, że w pewnym otoczeniu dowolnego punktu  $r \in P$  istnieje  $n = \dim E = \dim H_r$  różniczkowalnych pól wektorowych na  $P$ , które w każdym punkcie tego otoczenia rozpinają  $H_r$ . Wektory należące do  $H_r$  nazywają się *poziomymi*. Mamy

$$T_r = H_r + V_r$$

i suma ta jest prosta. Każdy wektor  $v \in T_r$  można więc jednoznacznie przedstawić w postaci  $v = \text{hor } v + \text{ver } v$ , gdzie  $\text{hor } v \in H_r$  i  $\text{ver } v \in V_r$ .

Koneksję w wiązce głównej  $P$  można w pełni scharakteryzować za pomocą pewnego pola form, określonego na  $P$ , o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  grupy  $G$ . Algebrę tę utożsamiamy ze zbiorem lewnieźmiennicznych pól wektorowych na  $G$  względnie z przestrzenią styczną do  $G$  w jedności. Definiujemy formę koneksji  $\omega_r \in T_r \otimes \mathfrak{g}$  za pomocą wzoru

$$\langle v, \omega_r \rangle = \psi_r^{-1}(\text{ver } v), \quad \text{gdzie } v \in T_r \quad (3.3)$$

Tutaj  $\psi_r^{-1}$  oznacza izomorfizm  $V_r \rightarrow \mathfrak{g}$ , odwrotny względem odwzorowania stycznego w jedności do  $\psi_r : G \rightarrow G_{\pi(r)}$ . Pole form  $\omega$  posiada następujące własności:

$$v \in H_r \Leftrightarrow \langle v, \omega_r \rangle = 0 \quad (3.4)$$

dla każdego  $A \in \mathfrak{g}$  zachodzi  $\langle \psi'_r A, \omega_r \rangle = A$  (3.5)

$$\psi_a^* \omega = \text{ad}'_a \omega \quad \text{dla każdego } a \in G \quad (3.6)$$

Dwie pierwsze własności są oczywiste. Znaczenie trzeciej jest następujące: odwzorowanie  $\text{ad}'_a : G \rightarrow G$  określone przez  $\text{ad}'_a(b) = a^{-1}ba$  jest automorfizmem struktury grupy Liego. Symbol  $\text{ad}'_a$ , występujący w (3.6), oznacza izomorfizm  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , styczny względem tego ostatniego. Dowód równości (3.6) opiera się na (3.2). Wiadomo, że własności (3.5) i (3.6) są charakterystyczne dla form koneksji w tym sensie, że jeśli pole form spełnia (3.5) i (3.6), to pole elementów liniowych określone przez (3.4) definiuje pewną koneksję w  $P$ .

Dla dowolnej  $k$ -formy  $\alpha \in S \otimes \bigwedge^k T_r^*$  określamy jej część poziomą  $\text{hor } \alpha$ , kładąc

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, \text{hor } \alpha \rangle = \langle (\text{hor } v_1) \wedge \dots \wedge (\text{hor } v_k), \alpha \rangle$$

gdzie  $v_i \in T_r$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Oczywiście, (3.4) oznacza, że  $\text{hor } \omega = 0$ .

**3.2. Różniczkowanie kowariantne, forma krzywizny i równanie Cartana.** Niech  $P$  będzie wiązką główną z koneksją, niech  $E$  oznacza jej bazę,  $G$  — grupę struktury,  $\omega$  — pole form koneksji,  $\sigma$  — homomorfizm różniczkowalny  $G$  w  $GL(m)$ . Rozpatrzmy wiązkę  $M$ , stowarzyszoną z  $P$ , o włóknie typowym  $F = \mathbf{R}^m$ . Niech  $\varphi : E \rightarrow M$  będzie przekrojem,  $\tilde{\varphi} : P \rightarrow F$  odpowiadającą mu 0-formą typu  $\sigma$ . Forma hor  $d\tilde{\varphi}$  jest 1-formą typu  $\sigma$ . Istnieje zatem 1-forma  $\nabla\varphi$ , określona na  $E$ , o wartościach w  $M$  i taka, że

$$\text{hor } d\tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla\varphi}$$

Dla dowolnego pola wektorowego  $X \in CT(E)$

$$\nabla_X \varphi = \langle X, \nabla\varphi \rangle$$

jest przekrojem wiązki  $M$ . Pole form  $\nabla\varphi$  nazywa się pochodną kowariantną pola  $\varphi$ ; pole  $\nabla_X \varphi$  — pochodną kowariantną  $\varphi$  względem  $X$ . Obliczając wartość form występujących po obu stronach równości

$$\tilde{\nabla}\varphi = d\tilde{\varphi} + \sigma' \omega \cdot \tilde{\varphi} \quad (3.7)$$

na wektorach poziomych i pionowych, sprawdzamy, że (3.7) jest prawdziwe. (Kropka we wzorze (3.7) oznacza działanie macierzy  $(\sigma' \omega)(r) \in gl(m)$  na  $\tilde{\varphi}(r) \in \mathbf{R}^m$ ). Zupełnie podobnie dowodzi się, że dla *formy krzywizny*

$$\Omega = \text{hor } d\omega \quad (3.8)$$

która, na mocy (3.6), jest formą typu  $ad^{-1}$ , zachodzi następujące *równanie Cartana*

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \quad (3.9)$$

gdzie  $[\omega, \omega]$  jest 2-formą o wartościach w  $\mathfrak{g}$  taką, że

$$\langle X \wedge Y, [\omega, \omega] \rangle = [\langle X, \omega \rangle, \langle Y, \omega \rangle]$$

Tutaj  $X$  i  $Y$  są polami wektorowymi na  $P$ , a nawias kwadratowy po prawej stronie ostatniej równości oznacza wzięcie komutatora w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ . Prosty wniosek z równania Cartana jest *tożsamość Bianchi*

$$\text{hor } d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

W tradycyjnym ujęciu geometrii różniczkowej wprowadza się przekrój  $e : E \rightarrow P$  i przy jego pomocy wyraża pole  $\varphi$

$$f = \varphi \circ e$$

Formę koneksji poddaje się dwóm przekształceniom: rzutuje na  $E$  przy pomocy  $e^*$  i przenosi do  $gl(m)$  przy pomocy  $\sigma'$ :

$$\Gamma = e^* \sigma' \omega$$

Podobnie możemy określić

$$R = e^* \sigma' \Omega$$

Kładąc

$$\nabla f = e^* \tilde{\nabla} \varphi$$

na podstawie (3.7) otrzymujemy

$$\nabla f = df + \Gamma \cdot f \quad (3.11)$$

Jeśli wprowadzić układ współrzędnych  $\xi$  w  $E$  oraz bazę kanoniczną  $(\eta_\alpha)$  w  $\mathbf{R}^m$  i bazę dualną  $(\eta^\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , to formy występujące w (3.11) można przedstawić w postaci

$$f = f^\alpha \eta_\alpha, \quad \nabla f = \nabla_i f d\xi^i, \quad df = \partial_i f d\xi^i$$

$$\Gamma = \Gamma_{i\beta}^\alpha d\xi^i \otimes \eta_\alpha \otimes \eta^\beta$$

a stąd

$$\nabla_i f^\alpha = \partial_i f^\alpha + \Gamma_{i\beta}^\alpha f^\beta$$

Niech  $\bar{e} : E \rightarrow P$  będzie innym przekrojem. Na mocy definicji wiązki głównej istnieje odwzorowanie  $u : E \rightarrow G$  takie, że

$$\bar{e}(p) = \psi_{u(p)} \circ e(p)$$

Wprowadzając

$$\bar{f} = \tilde{\varphi} \circ \bar{e}, \quad \bar{\Gamma} = \bar{e}^* \sigma' \omega, \quad \bar{R} = \bar{e}^* \sigma' \Omega \quad \text{i} \quad U = \sigma \circ u$$

na podstawie (3.6) otrzymujemy

$$\bar{f} = U^{-1} f$$

$$\bar{\Gamma} = U^{-1} \Gamma U + U^{-1} dU$$

$$\bar{R} = U^{-1} R U$$

**3.3. Elektrodynamika.** Cząstki elektrycznie naładowane opisuje się w fizyce za pomocą pól będących przekrojami wiązek włóknistych, stowarzyszonych z wiązką główną  $P$  nad czasoprzestrzenią  $E$ , o grupie struktury  $\mathbf{T}$ , którą można utożsamić z multiplikatywną grupą liczb zespolonych o module jeden. Modelem pola elektromagnetycznego jest koneksja w  $P$ .

Algebrę Liego grupy  $\mathbf{T}$  można utożsamić z  $\mathbf{R}$ . W związku z tym dla dowolnego przekroju  $e : E \rightarrow P$  forma

$$A = e^* \omega$$

jest zwykłą 1-formą o wartościach rzeczywistych, a

$$F = e^* \Omega$$

jest 2-formą o tej samej własności. Ponadto na mocy przemienności grupy  $\mathbf{T}$  forma  $F$  nie zależy od przekroju  $e$ , a na mocy równania Cartana mamy

$$F = dA$$



oraz

$$dF = 0 \quad (3.12)$$

Przy zmianie przekroju  $e$  na  $\bar{e}$

$$\bar{e}(p) = \psi_{\exp i\chi(p)} \circ e(p), \quad \chi: E \rightarrow R$$

forma  $A$  przechodzi w

$$\bar{A} = A + d\chi \quad (3.13)$$

W fizyce forma  $A$  nazywa się potencjałem elektromagnetycznym, forma  $F$  — natężeniem pola elektromagnetycznego, odwzorowanie  $A \rightarrow \bar{A}$  dane przez (3.13) — transformacją cechowania potencjału. Tożsamość Bianchi (3.12) jest równoważna pierwszej czwórce równań Maxwella (1.9). Równania Cartana sprowadzają się do związku między polem i potencjałami. Znikanie pola elektromagnetycznego  $F = 0$  jest równoważne całkowalności koneksji. W związku z tym opisaną tu koneksję nazywa się *koneksją elektromagnetyczną*.

Równania pola, opisujące oddziaływanie rozładowanych cząstek z polem elektromagnetycznym, można otrzymać zastępując w równaniach cząstek swobodnych zwykłe pochodne przez pochodne kowariantne względem koneksji elektromagnetycznej.

#### 4. Prawa zachowania

We współczesnej fizyce ważną rolę odgrywają *prawa zachowania*, będące uogólnieniem całek pierwszych równań mechaniki. Od dawna wiadomo, że w każdej teorii, której równania dają się wyprowadzić z zasady wariacyjnej niezmienniczej względem pewnej grupy przekształceń, można sformułować prawa zachowania, tzn. podać pewne funkcjonały stanu układu, których wartość nie zmienia się w czasie ruchu. Podstawowa praca w tej dziedzinie została napisana przez E. NOETHER w 1918 roku [5]. Niniejszy rozdział zawiera wykład części wyników owej pracy przy mniej ogólnych założeniach, ale w nieco nowocześniejszym ujęciu.

**4.1. Jednoparametrowe grupy przekształceń w  $R^n$ .** Będziemy rozpatrywali przestrzeń  $R^n$  z jej naturalną strukturą różniczkowej klasy  $\mathcal{C}^\infty$ . O wszystkich odwzorowaniach będziemy również zakładali, że są tej klasy.

Niech  $(x_t)_{t \in R}$  będzie jednoparametrową grupą przekształceń przestrzeni  $R^n$ . Oznaczając

$$\frac{dx_t}{dt}(x) = \frac{\partial}{\partial t} x_t(x), \quad \text{gdzie } x \in R^n$$

różniczkując związek

$$x_t \circ x_s = x_{t+s}$$

względem  $t$  i kładąc  $s = -t$ , otrzymujemy

$$\frac{dx_t}{dt} \circ x_t^{-1} = X \quad (4.1)$$

gdzie

$$X = \left. \frac{dx_t}{dt} \right|_{t=0}$$

jest polem wektorowym na  $\mathbf{R}^n$ , indukowanym przez grupę  $(x_t)$ . Jeśli  $l: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , to

$$X(l) = \left( \left. \frac{d}{dt} l \circ x_t \right)_{t=0} \right) = \langle X, \text{grad } l \rangle$$

Mówimy, że funkcja liczbowa  $l$  jest *niezmiennicza* względem grupy jednoparametrowej  $(x_t)$ , jeśli dla każdego  $t$  jest

$$l \circ x_t = l \quad (4.2)$$

Funkcja niezmiennicza znaczy w tym przypadku tyle co całka pierwsza układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dx_t}{dt} = X \circ x_t$$

Równanie (4.2) jest równoważne równaniu

$$X(l) = 0$$

Istotnie, dla dowolnej funkcji  $l$  oraz  $t \in \mathbf{R}$  mamy

$$\frac{d}{dt} (l \circ x_t) = \left\langle \frac{dx_t}{dt}, (\text{grad } l) \circ x_t \right\rangle = \langle X, \text{grad } l \rangle \circ x_t$$

czyli

$$\frac{d}{dt} (l \circ x_t) = X(l) \circ x_t \quad (4.3)$$

Niech  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  będzie odwzorowaniem różniczkowalnym; można mu przyporządkować odwzorowanie wykresowe

$$\bar{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$$

określone przez

$$\bar{f}(x) = (x, f(x))$$

a także odwzorowanie

$$\bar{\bar{f}}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n,m} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm}$$

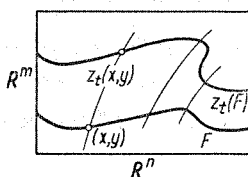
dane przez

$$\bar{\bar{f}}(x) = (x, f(x), (\text{grad } f)(x))$$

Ogólnie każdej funkcji  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  i liczbie naturalnej  $k$  można przyporządkować odwzorowanie, które punktowi  $x \in \mathbf{R}^n$  przyporządkowuje ciąg składający się

z tego punktu oraz wartości funkcji i jej pochodnych do rzędu  $k$ , obliczonych w tym punkcie. W dalszym ciągu wszystkie te odwzorowania będziemy oznaczali tym samym symbolem co wyjściową funkcję, a więc w szczególności będziemy opuszczali kreski nad  $f$  dla  $k = 0$  i  $k = 1$ . Z kontekstu będzie jasne, o które odwzorowanie chodzi w każdym przypadku.

Niech  $(z_t)$  będzie jednoparametrową grupą przekształceń rozmierności  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ . Pod jej wpływem wykres  $F \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  funkcji  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  przechodzi na zbiór  $z_t(F)$ , który na ogół nie jest wykresem odwzorowania (patrz rys. 5). Łatwo sformułować



Rys. 5

warunek dostateczny na to, aby obrazem wykresu dowolnej funkcji był wykres funkcji. Iloczyn  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  można uważać za (trywialną) wiązkę włóknistą o bazie  $\mathbf{R}^n$  i włóknach postaci  $\{x\} \times \mathbf{R}^m$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ . Widać od razu, że jeśli izomorfizm różniczkowalny  $z_t$  przeprowadza włókna na włókna, to jest postaci

$$z_t(x, y) = (x_t(x), y_t(x, y)), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^m \quad (4.4)$$

gdzie  $(x_t)$  jest jednoparametrową grupą przekształceń  $\mathbf{R}^n$ . Pod wpływem odwzorowania  $z_t$  postaci (4.4) wykres funkcji  $f$  przechodzi w wykres funkcji

$$f_t = y_t \circ f \circ x_t^{-1} \quad (4.5)$$

**4.2. Funkcja Lagrange'a i zasada wariacyjna.** Niech  $S$  będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Odwzorowaniu różniczkowalnemu

$$A: \mathbf{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{R}^n \otimes S$$

przyporządkujemy odwzorowanie

$$\text{Div } A: \mathbf{R}^{n,m} \times \mathbf{R}^{n^2m} \rightarrow S$$

określone jak następuje. Niech  $w = (x, y, \dot{y}, \ddot{y}) \in \mathbf{R}^{n,m} \times \mathbf{R}^{n^2m}$ , niech  $(\varepsilon_i)$  oznacza wektorową bazę kanoniczną w  $\mathbf{R}^n$ ,  $(e^i)$  — bazę dualną,  $(\eta_\alpha)$  — bazę kanoniczną w  $\mathbf{R}^m$ . Możemy napisać

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_i \otimes A^i, & x &= x^i \varepsilon_i, & y &= y^\alpha \eta_\alpha \\ \dot{y} &= \dot{y}_i^\alpha e^i \otimes \eta_\alpha, & \ddot{y} &= \ddot{y}_{ij}^\alpha e^i \otimes e^j \otimes \eta_\alpha \end{aligned}$$

gdzie

$$A^i: \mathbf{R}^{n,m} \rightarrow S$$

Definiujemy

$$(\text{Div } A)(w) = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}(w) + \dot{y}_i^\alpha \frac{\partial A^i}{\partial y^\alpha}(w) + \ddot{y}_{ij}^\alpha \frac{\partial A^i}{\partial \dot{y}_j^\alpha}(w)$$

Jeśli  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , to

$$(\text{Div } A) \circ f = \text{div}(A \circ f) \quad (4.6)$$

gdzie  $\text{div}$  oznacza zwykłą dywergencję w  $\mathbf{R}^n$ .

W dalszym ciągu zajmiemy się pewną ustaloną funkcją różniczkowalną

$$L: \mathbf{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{R}$$

którą będziemy nazywali *funkcją Lagrange'a*. Funkcji tej można przyporządkować wyrażenie *Eulera-Lagrange'a*  $[L]$ , które jest odwzorowaniem

$$[L]: \mathbf{R}^{n,m} \times \mathbf{R}^{n^2m} \rightarrow \mathbf{R}^m$$

określonym przez

$$[L] = \frac{\partial L}{\partial y} - \text{Div} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

gdzie

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial y^\alpha} \eta^\alpha \text{ itd.}$$

Niech  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  będzie obszarem ograniczonym i  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ; funkcjonał  $W$  określony przez całkę Lebesgue'a

$$W(f, \Omega) = \int_{\Omega} L \circ f$$

nazywa się *działaniem*. W rachunku wariacyjnym dowodzi się, że znikanie pierwszej wariacji

$$\delta W(f, \Omega) = 0$$

jest równoważne zachodzeniu *równań Eulera-Lagrange'a*<sup>1)</sup>

$$[L] \circ f = 0 \text{ w } \Omega$$

Niech  $(z_t)$  będzie jednoparametrową grupą przekształceń postaci (4.4),  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  niech będzie obszarem ograniczonym i  $\Omega_t = x_t(\Omega)$ . Rozpatrzmy następujące zdania:

A. dla każdego  $t \in \mathbf{R}$  i  $f \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $[L] \circ f = 0 \Rightarrow [L] \circ f_t = 0$ ;

B. dla każdego  $t, f$  i  $\Omega$ ,  $W(f_t, \Omega_t) = W(f, \Omega)$ ;

C. dla każdego  $f$  i  $\Omega$ ,  $\left. \frac{d}{dt} W(f_t, \Omega_t) \right|_{t=0} = 0$ .

Można udowodnić, czego tu nie będziemy robić, że  $B \Rightarrow A$  (z grubsza biorąc, chodzi o to, że jeśli  $f$  ekstremalizuje  $W$ , a wartość tego funkcjonału nie zmienia się

<sup>1)</sup> Na niniejszej konferencji K. Tatarkiewicz zwrócił uwagę na to, że w wielu wykładach i podręcznikach nie rozróżnia się wyrażenia Eulera-Lagrange'a i równań Eulera-Lagrange'a, co może prowadzić do nieporozumień.

pod wpływem działania grupy, to  $f_t$  też ekstremalizuje  $W$ ). Udowodnimy natomiast, że zachodzi  $B \Leftrightarrow C$  i znajdziemy proste równanie różniczkowe, równoważne  $B$  i  $C$ . Jeśli zachodzi  $B$ , to mówimy, że działanie  $W$  jest *niezmiennicze* względem działania grupy przekształceń  $(z_t)$ .

**4.3. Rozszerzenie działania grupy.** Jednoparametrową grupę przekształceń  $(z_t)$  postaci (4.4), działającą w  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , można w naturalny sposób rozszerzyć na  $\mathbf{R}_1^{n,m} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm}$ . Rozszerzone odwzorowania będziemy oznaczali symbolem  $u_t$ . Niech

$$(x, y, \dot{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm}$$

to

$$u_t(x, y, \dot{y}) = (x_t(x), y_t(x, y), \dot{y}_t(x, y, \dot{y}))$$

gdzie  $\dot{y}_t: \mathbf{R}_1^{n,m} \rightarrow \mathbf{R}^{nm}$  dane jest przez

$$\frac{\partial x_t}{\partial x}(x) \dot{y}_t(x, y, \dot{y}) = \frac{\partial y_t}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial y_t}{\partial \dot{y}}(x, y) \dot{y}$$

w łatwej do zrozumienia notacji. (W szczególności,  $\partial x_t / \partial x$  oznacza macierz Jacobiego przekształcenia  $x_t$ ). Dla dowolnej funkcji  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  mamy

$$u_t \circ f = f_t \circ x_t \quad (4.7)$$

Równość tę można przyjąć za definicję odwzorowania  $u_t$ . Oznaczając

$$\left. \frac{dx_t}{dt} \right|_{t=0} = X, \quad \left. \frac{dy_t}{dt} \right|_{t=0} = Y, \quad \left. \frac{du_t}{dt} \right|_{t=0} = U$$

otrzymujemy

$$U = \left( X, Y, \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \dot{y}} \dot{y} - \frac{\partial X}{\partial x} \dot{y} \right) \quad (4.8)$$

oraz

$$\left. \frac{df_t}{dt} \right|_{t=0} = Y \circ f - X(f)$$

**4.4. Niezmienniczość działania, równanie E. Noether i prawa zachowania.** Niech  $W$  będzie działaniem niezmienniczym względem jednoparametrowej grupy przekształceń  $(z_t)$ . Oznaczmy przez  $J_t$  jacobian odwzorowania  $x_t$ , tzn.

$$dx_t^1 \wedge \dots \wedge dx_t^n = J_t dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

to

$$W(f_t, \Omega_t) = \int_{\Omega_t} L \circ f_t = \int_{\Omega} J_t \cdot L \circ f_t \circ x_t$$

Biorąc pod uwagę niezmienniczość  $W$  oraz dowolność  $\Omega$  otrzymujemy, że warunek B jest równoważny

$$J_t \cdot L \circ f_t \circ x_t = L \circ f \text{ dla każdego } f$$

czyli na mocy (4.7)

$$J_t \cdot L \circ u_t = L$$

Na podstawie definicji jacobianu otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \ln J_t = (\operatorname{div} X) \circ x_t$$

a stąd korzystając z (4.3)

$$J_t^{-1} \frac{d}{dt} (J_t \cdot L \circ u_t) = (U(L) + L \operatorname{div} X) \circ u_t$$

Wynika stąd, że znikanie dla dowolnego  $\Omega$  i  $f$  pochodnej

$$\left. \frac{d}{dt} W(f_t, \Omega_t) \right|_{t=0} = \int_{\Omega} N \circ f$$

gdzie

$$N = U(L) + L \operatorname{div} X \quad (4.9)$$

jest równoważne niezmienniczości działania, co dowodzi B  $\Leftrightarrow$  C. *Równanie E. Noether*

$$N = 0 \quad (4.10)$$

jest także równoważne niezmienniczości działania. Funkcję  $N: \mathbf{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{R}$  można w banalny sposób przedłużyć do odwzorowania  $\mathbf{R}^{n,m} \times \mathbf{R}^{n^2m} \rightarrow \mathbf{R}$ , które oznaczymy też przez  $N$ . Łatwo sprawdzić na podstawie (4.8), że tak przedłużone  $N$  można zapisać w postaci

$$N = [L](Y - \dot{y} \cdot X) + \operatorname{Div} \left( LX + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} (Y - \dot{y} \cdot X) \right) \quad (4.11)$$

Dla dowolnej funkcji  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  wprowadzamy „prąd”

$$j = XL \circ f + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \circ f \frac{df_t}{dt} \Big|_{t=0}$$

Jeśli działanie jest niezmiennicze,  $N = 0$ , a  $f$  spełnia równania Eulera–Lagrange’a, to na mocy (4.11)

$$\operatorname{div} j = 0 \quad (4.12)$$

Równania postaci (4.12) noszą w fizyce nazwę różniczkowych praw zachowania. Na przykład, jeśli  $j$  jest gęstością stacjonarnego prądu elektrycznego, to równanie (4.12) stanowi matematyczny wyraz prawa zachowania ładunku. W przypadku

mechaniki klasycznej mamy  $n = 1$ , współrzędną  $x$  można utożsamić z czasem, a równanie (4.12) oznacza po prostu  $dj/dx = 0$ , tzn. niezależność wielkości  $j$  od czasu.

Przy ustalonej funkcji Lagrange'a równanie Noether jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu względem składowych pola wektorowego  $(X, Y)$ . Własności zbioru rozwiązań tego równania zależą od  $L$ . W każdym razie łatwo zauważyć, że ów zbiór rozwiązań jest podalgebrą algebry Liego wszystkich pól wektorowych na  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ . Jeśli podalgebra ta jest skończenie wymiarowa, otrzymujemy tyle praw zachowania, ile wynosi jej wymiar. Informacje na temat przypadku nieskończenie wymiarowego można znaleźć w cytowanych pracach [1, 5, 9, 11].

Na zakończenie podamy kilka przykładów interesujących z punktu widzenia fizyki.

**Przykład 1.** Niech  $Q$  będzie dodatnią formą kwadratową, określoną na przestrzeni wektorowej  $\mathbf{R}^m$

$$Q(\dot{y}) = a_{\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m$$

Przyjmujemy  $n = 1$  i definiujemy  $L$  jako banalne przedłużenie  $Q^p (p > 0)$  na  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ ; możemy po prostu pisać  $L = Q^p$ . Biorąc pod uwagę (4.8), równanie Noether można zapisać jako

$$(1-2p) \frac{dX}{dx} Q(\dot{y}) + 2p a_{\alpha\beta} \dot{y}^\alpha \left( \frac{\partial Y^\beta}{\partial x} + \frac{\partial Y^\beta}{\partial y^\gamma} \dot{y}^\gamma \right) = 0$$

Jeśli  $p \neq \frac{1}{2}$ , to ogólne rozwiązanie jest postaci

$$X = \mu x + \nu, \quad Y^\alpha = \omega_\beta^\alpha y^\beta + \eta^\alpha + \frac{2p-1}{2p} \mu y^\alpha \quad (4.13)$$

gdzie  $\mu, \nu, \eta^\alpha$  i  $\omega_\beta^\alpha$  są liczbami rzeczywistymi, spełniającymi

$$a_{\alpha\beta} \omega_\beta^\gamma + a_{\beta\gamma} \omega_\alpha^\gamma = 0$$

Zbiór rozwiązań jest w tym przypadku  $\left( \frac{m(m+1)}{2} + 2 \right)$ -wymiarowy. Układowi  $N$  cząstek nie oddziałujących i nierelatywistycznych odpowiada  $p = 1$  i  $m = 3N$ .

Jeśli  $p = 1/2$ , to oprócz rozwiązań danych przez (4.13) możemy wziąć jako  $X$  dowolną funkcję (klasy  $\mathcal{C}^\infty$ ) jednej zmiennej rzeczywistej oraz  $Y = 0$ . W tym przypadku przestrzeń wektorowa rozwiązań równania Noether jest nieskończenie wymiarowa.

**Przykład 2.** Jako uogólnienie poprzedniego przykładu rozpatrzmy funkcję Lagrange'a  $L$ , określoną na  $\mathbf{R}^{n,m}$  ( $n$  i  $m$  dowolne), o tej własności, że pole

$$\begin{aligned} X : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n, \text{ dowolne różniczkowalne} \\ Y &= 0 \end{aligned}$$

spełnia równanie Noether, które teraz sprowadza się do

$$-[L]yX + \text{Div} \left( LX - \frac{\partial L}{\partial y} yX \right) = 0$$

Wprowadzając automorfizm jednostkowy  $I$  przestrzeni wektorowej  $\mathbf{R}^n$ , możemy ostatnie równanie przepisać w postaci

$$-[L]yX + X \text{Div} \left( LI - \frac{\partial L}{\partial y} y \right) + \left( LI - \frac{\partial L}{\partial y} y \right) \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

Biorąc pod uwagę dowolność pola  $X$  wnosimy, że muszą znikać oddzielnie współczynniki przy składowych tego pola oraz jego pochodnych. Wynikające stąd równania zapiszemy przy użyciu wskaźników

$$\begin{aligned} L \delta_i^j - \frac{\partial L}{\partial y_j} y_i^j &= 0 & (\alpha = 1, \dots, m) \\ [L]_{\alpha} y_i^{\alpha} &= 0 & (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Z pierwszego z powyższych równań wynika, że  $L$  jest jednorodną funkcją stopnia  $n$  zmiennych  $y$ , natomiast drugie oznacza, że równania Eulera-Lagrange'a nie są niezależne. Ten ostatni wynik jest typowy dla przypadku, gdy równanie Noether dopuszcza rozwiązania zależne od dowolnych funkcji.

**Przykład 3.** Klasyczna teoria pola tensorowego. Niech ponownie  $E$  oznacza rozmierność różniczkową, będącą modelem czasoprzestrzeni,  $\sigma(E)$  — wiązkę wielkości geometrycznych typu  $\sigma$ , określonych na  $E$ . W klasycznej teorii pola rozpatruje się funkcję Lagrange'a  $L: \mathbf{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{R}$ , będącą gęstością skalarną w tym sensie, że dla dowolnego przekroju  $\varphi$  wiązki  $\sigma(E)$  oraz dowolnych układów współrzędnych  $\xi$  i  $\bar{\xi} = \bar{x} \circ \xi$  w  $E$  zachodzi

$$J \cdot L \circ \bar{f} \circ \bar{x} = L \circ f \tag{4.14}$$

gdzie  $f$  i  $\bar{f}$  są dane odpowiednio wzorami (2.11) i (2.12), a

$$J = \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

Niech  $(p_t)$  będzie jednoparametrową grupą przekształceń rozmierności  $E$ ; pole wektorowe indukowane przez tę grupę i wyrażone przez współrzędne lokalne  $\xi$  będziemy oznaczali przez  $X$ . Rodzinie  $(p_t)$  i współrzędnym  $\xi$  można przyporządkować jednoparametrową grupę przekształceń  $(x_t)$  przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ . Aby to uczynić, kładziemy

$$x_t = \xi \circ p_t \circ \xi^{-1}$$

Grupa  $(x_t)$  indukuje pole  $X$ . Określamy teraz jednoparametrową grupę  $(z_t)$  przekształceń przestrzeni  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  kładąc  $z_t = (x_t, y_t)$ , gdzie

$$y_t(x, y) = \sigma_{x_t}(y), \quad x_t' = \frac{\partial x_t}{\partial x}(x) \tag{4.15}$$



Z drugiej strony, jeśli wprowadzić współrzędne

$$\xi_t = x_t \circ \xi = \xi \circ p_t$$

oraz odpowiadające tym współrzędnym pole baz naturalnych

$$e_t = p_t'^{-1} \circ e \circ p_t$$

to dla dowolnego przekroju  $\varphi$  na podstawie (2.14) zachodzi

$$y_t \circ \tilde{\varphi} \circ e \circ \xi^{-1} \circ x_t^{-1} = \tilde{\varphi} \circ e_t \circ \xi_t^{-1}$$

czyli na mocy (4.5)

$$f_t = \tilde{\varphi} \circ e_t \circ \xi_t^{-1}$$

Oznacza to, że (4.14) zachodzi dla  $\bar{x} = x_t$  i  $\bar{f} = f_t$ . Inaczej mówiąc, działanie  $W = \int_{\Omega} L \circ f$ , leżące u podstaw klasycznej teorii pola wielkości geometrycznej typu  $\sigma$ , jest niezmiennicze względem jednoparametrowej grupy przekształceń  $(z_t)$  określonej przez (4.15). Ponadto, na mocy (2.19)

$$\left. \frac{df_t}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\varphi} \circ p_t'^{-1} \circ e \circ \xi^{-1} \right|_{t=0} = - \mathcal{L}_{\bar{X}} f$$

Równanie Noether, po uwzględnieniu (4.11) i podstawieniu do niego  $f$ , przybiera postać

$$\operatorname{div} \left( XL \circ f - \mathcal{L}_{\bar{X}} f \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \circ f \right) - \mathcal{L}_{\bar{X}} f \cdot [L] \circ f = 0$$

Dokładniejsze omówienie wynikających stąd praw zachowania można znaleźć w cytowanych pracach [6, 9, 11].

### Literatura

1. BERGMANN P. G.: *Nonlinear Field Theories*. Physical Review 75 (1949) 680.
2. BOURBAKI N.: *Algèbre*. Ch. II, § 4. Paris 1962. (Istnieje przekład rosyjski, Moskwa 1962).
3. GOETZ A. i in.: *Zewnętrzne formy różniczkowe i ich zastosowania*. WNT Warszawa 1965.
4. KOBAYASHI S., NOMIZU K.: *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I. New York 1963.
5. NOETHER E.: *Invariante Variationsprobleme*. Göttingen Nachrichten (1918) 235.
6. SCHOUTEN J. A.: *Ricci-Calculus*. Wyd. II. Berlin 1954.
7. STERNBERG S.: *Lectures on Differential Geometry*. Englewood Cliffs 1964.
8. TATARKIEWICZ K.: *Wykłady mechaniki teoretycznej*. Skrypt. Lublin 1962.
9. TRAUTMAN A.: *Conservation Laws in General Relativity*. Rozdział w Gravitation pod red. L. W. Wittena. New York 1962.
10. TRAUTMAN A.: *Comparison of Newtonian and Relativistic Theories of Space-Time*. Artykuł w Perspectives in Geometry and Relativity pod red. B. Hoffmanna. Bloomington 1966.
11. TRAUTMAN A.: *Obszcząja teoria otnositelnosti*. Uspiechi Fiziczeskich Nauk 89 (1966) 3.
12. UTIYAMA R.: *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*. Physical Review 101 (1956) 1957.
13. MAC LANE S.: *Categorical Algebra*. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965) 40.