14.

COLLOQUES INTERNATIONAUX
DU
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

XCI

# LES THÉORIES RELATIVISTES DE LA GRAVITATION

ROYAUMONT
(21-27 Juin 1959)

*EXTRAIT*

ÉDITIONS DU
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, QUAI ANATOLE-FRANCE — PARIS - VII

1962

# SUR LES LOIS DE CONSERVATION DANS LES ESPACES DE RIEMANN

par Dr. A. TRAUTMAN

*Institut de Physique de l'Université de Varsovie (Pologne)*

RESUME

A chaque groupe d'isométries correspondent une loi de conservation et une intégrale première des équations du mouvement. L'absence de symétries de l'espace-temps exclut l'existence de lois de conservation analogues à celles de la relativité restreinte. En particulier, en théorie einsteinienne de la gravitation, aucune entité à deux indices ne peut être considérée comme décrivant la densité d'impulsion-énergie.

La notion de l'énergie et les lois de conservation en Relativité Générale ont été récemment le sujet de nombreux travaux. Le but de cette communication est de rappeler un point important qui se rattache à la notion de l'énergie. L'idée essentielle dont il s'agit peut être résumée en une seule phrase : ce sont les symétries de l'espace-temps qui assurent l'existence des lois de conservation de l'énergie-impulsion et du moment angulaire. Plus précisément, les lois de conservation correspondent aux isométries de l'espace-temps. Dans les théories habituelles des champs, à chaque solution de l'équation de KILLING on peut associer une densité vectorielle dont la divergence est nulle. Malheureusement un espace de RIEMANN en général n'admet pas de groupes d'isométries. Ceci est l'origine des difficultés avec les lois de conservation en Relativité Générale.

La liaison des lois de conservation aux symétries est connue depuis longtemps grâce aux travaux du groupe de Göttingen (F. ENGEL, F. KLEIN, E. NOETHER, E. BESSEL-HAGEN; *cf.* HILL [1] pour la bibliographie). SCHWINGER [2], FOCK [3] et PIRANI ont attiré l'attention sur le rôle que joue l'équation de KILLING dans la construction des quantités qui se conservent. Ces idées ont été développées par l'auteur de cette communication [4], [5].

Nous présenterons les idées essentielles dans la notation de BERGMANN [6]. Soient $y_A(x)$ ($A = 1 \dots N$) les fonctions décrivant les champs, y compris le champ métrique. Ces fonctions satisfont aux équations des champs

$$L^A = 0 \tag{1}$$

qu'on obtient d'un principe variationnel

$$\delta \mathrm{W} = 0$$

où

$$\mathrm{W} = \int \mathrm{L}(y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A},\rho})\, dx \,.$$

Le lagrangien L est la même fonction de ses variables $y_{\mathrm{A}}$ et $y_{\mathrm{A},\rho}$ dans tous les systèmes de coordonnées. Soit $\xi^{\alpha}(x)$ un champ de vecteurs; on peut y associer une transformation de coordonnées infinitésimale, définie par

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon\, \xi^{\alpha}(x) \,.$$

Introduisons la « variation totale » (ou « substantielle ») du champ $y_{\mathrm{A}}$

$$\overline{\delta}\, y_{\mathrm{A}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \left[ y'_{\mathrm{A}}(x) - y_{\mathrm{A}}(x) \right]$$

En mathématiques on appelle $-\overline{\delta}\, y_{\mathrm{A}}$ la dérivée de Lie de $y_{\mathrm{A}}$ par rapport à $\xi$. Une condition suffisante pour que les équations de champ $\mathrm{L}^{\mathrm{A}} = 0$ écrites dans des systèmes de coordonnées différents soient compatibles est qu'il existe des fonctions $\mathrm{L}^{\rho}$ telles que

$$\overline{\delta}\, \mathrm{L} \equiv -\mathrm{L}^{\rho}{}_{,\rho} \,. \tag{2}$$

Cette condition est évidemment satisfaite si L est une densité scalaire ($\mathrm{L}^{\rho} = \mathrm{L}\,\xi^{\rho}$). Elle est aussi satisfaite dans le cas de la Relativité Générale, quand on prend pour L le lagrangien gravitationnel quadratique dans les symboles de Christoffel. Si les équations de champ (1) sont satisfaites l'équation (2) devient

$$\left( \mathrm{L}^{\rho} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y_{\mathrm{A},\rho}}\, \overline{\delta}\, y_{\mathrm{A}} \right)_{,\rho} = 0 \,. \tag{3}$$

Ce sont des lois de conservation faibles; le champ $\xi$ étant arbitraire il en existe une infinité. Pour obtenir une loi bien définie il faut choisir un champ $\xi$. On peut le faire d'une façon satisfaisante seulement en spécifiant le caractère géométrique (physique) du $\xi$. Autrement dit, le vecteur $\xi$ doit être lié aux propriétés géométriques ou physiques de l'espace-temps. Par exemple, s'il y a des observateurs privilégiés dans la théorie on peut prendre pour $\xi$ leur vitesse. Le choix pour $\xi$ d'un vecteur qui n'a pas de signification intrinsèque semble contredire les principes de la Relativité Générale.

Un choix évident consiste à prendre pour $\xi$ un champ de Killing. C'est ainsi qu'on arrive en Relativité Restreinte aux lois canoniques pour l'énergie, l'impulsion et le moment angulaire.

Dans le cas où il existe un groupe d'isométries on peut obtenir une quantité qui se conserve et qui se rapporte à la matière seule, c'est-à-dire qui s'annule en l'absence de matière. Pour étudier ce cas dénotons par $\psi_a$ les variables décrivant la matière (champ électromagnétique, fluides, etc.). On a alors $y_{\mathrm{A}} = (g_{\mu\nu}, \psi_a)$, $(a = 1, \ldots, \mathrm{N} - 10)$. Soit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_a, \psi_{a,\rho}, g_{\mu\nu})$$

le lagrangien de la matière. Supposons que $\mathcal{L}$ est une densité scalaire, il vient alors

$$0 \equiv \bar{\delta}\mathcal{L} + (\mathcal{L}\,\xi^\rho)_{,\rho} \equiv \mathcal{L}^a\,\bar{\delta}\,\psi_a + \frac{1}{2}\,T^{\alpha\beta}\,\bar{\delta}\,g_{\alpha\beta} + \left(\mathcal{L}\,\xi^\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{a,\rho}}\,\bar{\delta}\,\psi_a\right)_{,\rho} \tag{4}$$

où $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique d'énergie-impulsion du champ $\psi$. Si $\xi$ engendre une isométrie,

$$\bar{\delta}\,g_{\alpha\beta} = 0 \tag{5}$$

et si les équations du mouvement de $\psi$

$$\mathcal{L}^a = 0$$

sont satisfaites, on obtient une loi « canonique » de conservation

$$I^\rho{}_{,\rho} = \left(\mathcal{L}\,\xi^\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{a,\rho}}\,\bar{\delta}\,\psi_a\right)_{,\rho} = 0 \tag{6}$$

$I^\rho$ est une densité vectorielle et l'intégrale

$$I = \int I^\rho\, n_\rho\, d\sigma$$

calculée sur une hypersurface $\sigma$ orientée dans l'espace est un scalaire qui se conserve. Si $\xi$ est partout orienté dans le temps ($V_4$ stationnaire) on peut interpréter I comme représentant l'énergie.

Des considérations analogues peuvent être appliquées au cas des particules ponctuelles [5].

Dans le cas où $T^\alpha_\alpha = 0$ on peut affaiblir l'équation (5) en la remplaçant par l'équation de transformations conformes

$$\bar{\delta}\,g_{\alpha\beta} = \chi\, g_{\alpha\beta} \qquad (\chi : \text{scalaire}) \tag{7}$$

C'est ainsi qu'on obtient quinze lois de conservation pour le champ électromagnétique en Relativité Restreinte. Le pseudotenseur d'énergie-impulsion introduit par Einstein peut aussi être obtenu à partir de (3), avec le lagrangien gravitationnel pour L. Ce pseudotenseur a des propriétés de transformation bizarres et il est douteux qu'il puisse décrire dans le cas général quelque chose qu'on pourrait nommer l'énergie. La même remarque s'applique aux nombreuses modifications du pseudotenseur d'Einstein, notamment à celle de Møller [7]. A l'aide du pseudotenseur on peut définir l'énergie totale d'un système qui produit un champ gravitationnel à comportement asymptotique euclidien [8], [9]. Il est aussi possible de formuler des lois de conservation approximatives, par exemple dans le cadre de la méthode d'Einstein, Infeld et Hoffmann.

Pour montrer que le pseudotenseur ne peut pas être appliqué dans le cas général d'un champ gravitationnel prenons la métrique de Robinson [10]

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - 2H\,(dx^0)^2, \quad H = H(x^0, x^1, x^2). \tag{8}$$

Cette forme métrique comprend comme un cas particulier les ondes planes gravitationnelles. Par un choix approprié de la fonction H on peut obtenir de (8) les ondes planes gravitationnelles et éléctromagnétiques. Il est intéressant de noter que (8) satisfait aux conditions d'harmonicité définissant les coordonnées isothermiques $(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$. Le pseudotenseur d'EINSTEIN $t_{\mu}{}^{\nu}$ calculé à partir de (8) est simplement égal à zéro. Il en est de même pour l'objet $\mathfrak{T}_{\mu}{}^{\nu}$ introduit par MØLLER. Cela montre aussi que l'emploi des coordonnées harmoniques n'est pas suffisant pour résoudre les difficultés liées à la notion de l'énergie en Relativité Générale. Etant donnée l'analogie très poussée qui existe entre les ondes planes gravitationnelles et les ondes en théorie de Maxwell on serait surpris s'il fallait attribuer aux ondes gravitationnelles une densité d'énergie nulle.

Les notions de l'énergie, de l'impulsion et du moment angulaire total sont liées au caractère euclidien de l'espace-temps. On peut les appliquer en Relativité Générale seulement dans les cas où l'espace riemannien en question ne diffère pas trop de l'espace plan.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] E. L. HILL, *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 253 (1951).
[2] J. SCHWINGER, *Phys. Rev.*, **91**, 713 (1953).
[3] V. A. FOCK, *Théorie de l'espace-temps et de la gravitation* (en russe). Moscou, 1955.
[4] A. TRAUTMAN, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **4**, 679 (1956).
[5] A. TRAUTMAN, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **5**, 721 (1957).
[6] P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, **75**, 680 (1949).
[7] C. MØLLER (Communication au Colloque).
[8] A. EINSTEIN, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch.*, **448** (1918).
[9] F. KLEIN, *Nachr. Ges. Göttingen*, **394** (1918).
[10] I. ROBINSON (en cours de publication).


## DISCUSSION

*Intervention du Prof. Möller*

In connection with the statement that the energy momentum complex $\mathfrak{T}_i^k$ vanishes in the case of the metric considered by Trautman I want first of all to ask if the system of coordinates corresponds to a physically allowed system of reference. By a physically allowed system of reference I understand a system in which the velorities of the reference points with respect to a local system of inertia are always *smaller* then $c$. Although other systems of coordinates where $g_{44} \geqslant 0$ are mathematically conceivable they have no physical meaning and therefore also the physical quantity $\mathfrak{T}_i^k$ has no meaning in such a system. On the other hand I do not want to exclude any of the physically acceptable systems of coordinates since this would be against the spirit of the general theory of relativity. In particular I would not like to forbid the use of systems where $g_{i4} = \delta_{i4}$. It is true that in such systems $\mathfrak{T}_4^k = 0$, in particular the energy density $\mathfrak{T}_4^4$ and therefore also the total energy of the system is zero. This is however just what one should expect physically, for the system of reference in question is one in which all the reference points are falling freely under the influence of the gravitational field. Therefore a test particle originally at rest in the frame of reference will remain at rest at the same reference point. By introducing such a system of reference we have thus transformed away all the dynamical properties of the gravitational field; an observer which makes experiments only with test particles will therefore not be able to discover the matter present. It is therefore also quite natural that the total energy which is a dynamical quantity should vanish in this particular type of systems of reference. As regards dynamics an observer in such systems will have the impression that he is in a system of inertia where the energy density $\mathfrak{T}_4^4$ (in contrast to Einstein's $\theta_4^4$) is always zero. Of course if he has made geometrical measurements with standard measuring rods in the system of reference he will discover that he is *not* in a system of inertia since the metric is not Euclidean. In general the spatial metric is even time dependent.

The above remarks apply only to the case where the introduction of time-orthogonal coordinates with $g_{44} =$ const. does not introduce any singularities in the metric. If singularities are introduced the energy density is simply not defined in the singular points and we cannot say anything about the value of the total energy. Then the expression for the energy momentum complex can be applied to those regions of space only where the metric is regular. For instance if we start with the usual static Schwarzschild solution and, following Lemaître and Synge, introduce a system of coordinates the energy density is then only well-defined and zero outside this point for which $g_{44} = -\delta_{44}$ the metric tensor has a singularity at the origin and where $\mathfrak{T}_4^4$ becomes of the form $\infty$ times 0, i.e. indeterminate.

It should also be emphasised that the energy of a physical system also in the special theory of relativity is a *relative* quantity which changes when one passes over from one system of coordinates to another. This is naturally even more so in the general theory where we have a much larger group of transformations at our disposal. Clearly we must expect that familiar features will turn up in strangely moving frames of references but in principle I think we should allow the use of all physically acceptable systems of reference.

### *Intervention du docteur Fletcher*

En ce qui concerne l'emploi dans les espaces à comportement asymptotique euclidien, je voudrais faire la remarque suivante : Je pense avoir démontré que si dans un tel espace, l'impulsion-énergie totale évaluée sur une hypersurface est unique, i. e., indépendante des transformations de coordonnées, alors cette impulsion-énergie est nécessairement conservée. C'est le théorème réciproque de celui cité de Landau et Lifschitz.

C'est un résultat qui n'est pas modifié par l'imposition des conditions de coordonnées. Ce résultat ne contredit en rien le travail du docteur Trautman, puisque j'ai supposé que le calcul de l'impulsion-énergie peut être effectué sur une hypersurface quelconque et non, comme c'est le cas dans le travail du docteur Trautman, seulement sur une hypersurface appartenant à un ensemble restreint.