Teoria względności

orientacyjny program wykładu w roku akad. 1962/63

Podstawy doświadczalne szczególnej teorii względności

Uwagi historyczne. Hipoteza eteru. Doświadczenie Michelsona-Morleya. Skrócenie Lorentza- Fitzgeralda. Hipoteza eteru unoszonego. Teorie emisyjne. Doswiadczenia Kennedy'ego-Thorndike'a oraz Ivesa-Stilwella.

Postulaty Einsteina

Postulat względności i postulat stałości prędkości światła. Względność równoczesności. Interwał i czas własny. Przekształcenia Lorentza. Twierdzenie o dodawaniu prędkości; aberacja; zjawisko Dopplera.

Elementy geometrii różniczkowej i rachunku tensorowego

Przestrzeń Minkowskiego i grupa Lorentza. Grupa affiniczna i tensory. Geometria Riemanna. Przesunięcie rownoległe. Geodetyki. Tensor krzywizny i jego własnosci Twierdzenia całkowe.

Mechanika relatywistyczna

Kinematyka relatywistyczna jako geometria krzywych w przestrzeni Minkowskiego. Ruchy jednostajnie przyśpieszone. Działanie i równania ruchu. Zderzenia i rozpady.

Elektrodynamika w sformułowaniu tensorowym

Działanie i równania Maxwella. Geometria biwektorów w przestrzeni Minkowskiego. Zerowe pola elektromagnetyczne.

Elementy klasycznej teorii pola

Konsekwencje niezmienniczości zasady wariacyjnej względem grupy pekształceń. Kanoniczny i symetryczny tensor energii-pędu. Prawa zachowania wielkości globalnych w szczególnej teorii względności. Związek między równaniami pola, równaniami ruchu i prawami zachowania. Kanoniczne sformuławanie teorii pola. Teorie niezmiennicze względem grup cechowania.

Grupa obrotów i grupa Lorentza

Związek między grupą obrotów w R_3 a grupą macierzy unitarnych unimodularnych drugiego stopnia. Własności grupy Lorentza; jej związek z grupą macierzy unimodularnych drugiego stopnia. Spinory.

Podstawy fizyczne ogólnej teorii względności

Uwagi historyczne. Pomiary Eotvosa. Zasada równoważności. Związek między grawitacją a metryką. Postulat ogólnej niezmienniczości. Wnioski z zasady równoważności i zasady odpowiedniości. Stałe pole grawitacyjne. Przesunięcie linii widmowych w polu grawitacyjnym.

Równania pola grawitacyjnego

Wyprowadzenie rownań Einsteina z zasady wariacyjnej.. Pola o symetrii kulistej i rozwiązanie Schwarzschilda. Zjawisko wiekowego przesunięcia perihelium planet oraz zjawisko ugięcia promieni świetlnych w pobliżu Słońca.

Równania ruchu i prawa zachowania w ogólnej teorii względności

Fizyczne źródło trudności z pojęciem energii grawitacyjnej. Pseudotensor i superpotencjały. Globalne prawa zachowania dla układów wyspowych. Wynikanie równań ruchu ciał z równań pola grawitacyjnego. Metoda Einsteina-Infelda-Hoffmanna rozwiązywania równań pola i otrzymywania równań ruchu.

Fale grawitacyjne

Analogie i różnice między elektrodynamiką i teorią grawitacji. Przybliżenie słabego pola. Czasoprzestrzenie o niedeformującej optyce. Własności algebraiczne tensora krzywizny i klasyfikacja Petrowa. Płaskie i kuliste fale grawitacyjne.

Kosmologia relatywistyczna

Model Einsteina. Przestrzenie Riemanna o stałej krzywiźnie. Świat de Sittera i teoria Bondiego-Golda-Hoyla'a. Rozwiazania Friedmanna.

Andrzej Trautman

W1

1962/63

(1)

wykł. dwugodz.
1962/63

Szczególna teoria względności

I Podstawy doświadczalne szczególnej teorii względności

~~Uwaga~~

Jednym z najważniejszych odkryć, bez którego powstanie teorii względności nie byłoby możliwe, było stwierdzenie skończonej prędkości światła. Dokonał tego astronom duński O. Römer w 1675 r. na podstawie analizy obserwacji ruchów księżyców Jowisza. Otrzymał on jako wartość prędkości światła 310 000 km/sek.

Obserwując zaćmienia księżyca K stwierdzono, że okresy między zaćmieniami wydają się być krótsze, gdy ziemia znajduje się w Z', a dłuższe, gdy w Z.

Z XVII wieku datują się również pierwsze teorie światła: teoria korpuskularna Newtona i teoria falowa Huyghensa. Teoria korpuskularna jest powszechnie uznawana aż do samego końca XVIII w. Np. J. Bradley, który odkrywa w 1728 r. zjawisko aberracji gwiazd stałych, tłumaczy je także na gruncie teorii korpuskularnej.

[Zjawisko aberracji polega na tym, że gwiazdy stałe widać o różnych porach w nieco innych kierunkach. W ciągu roku gwiazdy znajdujące się w zenicie zakreślają niewielkie elipsy. Tłumaczy się to ruchem Ziemi wokół Słońca. Na gruncie teorii korpuskularnej zjawisko to ma taki sam charakter jak zjawisko powstawania ukośnych śladów na szybie pędzącego pociągu w czasie deszczu]

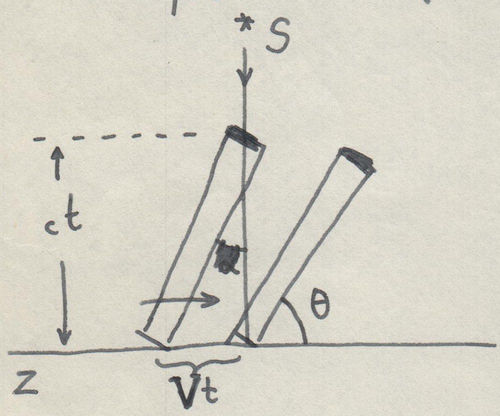
Young w 1799 r. krytykuje teorię korpuskularną mówiąc, że nie rozumie dlaczego prędkość światła nie zależy od jego natężenia. W r. 1818 Fresnel tłumaczy zjawiska dyfrakcji, interferencji oraz polaryzacji światła na gruncie teorii falowej.
Young podał wytłumaczenie zjawiska aberracji na gruncie teorii falowej. Przyjmował on w tym celu, że światło rozchodzi się w postaci drgań spoczywającego eteru.

W2

Eter: jeśli przyjąć falową teorię światła, to narzuca się potrzeba wprowadzenia eteru. Wszystkie zjawiska falowe, które dotychczas znano, polegały na rozchodzeniu się drgań w ośrodkach materialnych (powietrze, woda, ośrodki sprężyste).

Pojęcie eteru wprowadzono znacznie wcześniej, w związku z siłami elektrycznymi i magnetycznymi, które miały być przenoszone przez eter elektryczny.

Wytłumaczenie zjawiska aberracji na podstawie teorii eteru spoczywającego jest w zasadzie takie samo, jak na podstawie teorii korpuskularnej.



$$\mathrm{ctg}\,\theta = \frac{V}{c}$$

Jeśli Ziemia porusza się względem eteru z prędkością V, to aby zaobserwować gwiazdę w źrenicy należy lunetę pochylić w kierunku ruchu Ziemi o kąt $\pi/2 - \theta$.

Hipoteza spoczywającego eteru była czymś nowym w stosunku do poglądów Newtona. Według mechaniki newtonowskiej zjawiska mechaniczne są tego rodzaju, że nie wyróżniają żadnego absolutnego układu odniesienia. Matematycznym wyrazem tego jest niezmienniczość postaci równań mechaniki Newtona względem transformacji Galileusza

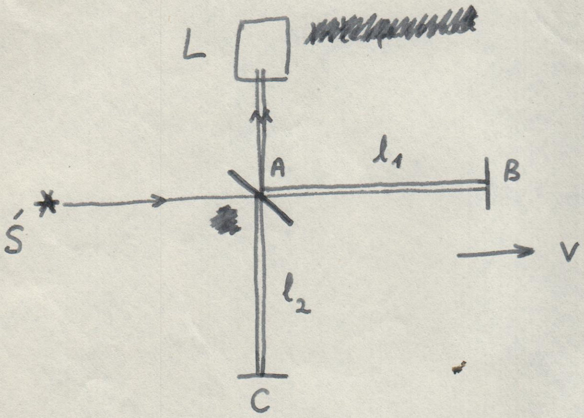
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}\,t, \qquad t' = t$$

Nie ma jednak na razie żadnej sprzeczności: spoczywający eter ≡ absolutny układ odniesienia jest wyróżniony przez zjawiska optyczne.

Narzucała się potrzeba wykonania doświadczeń, których celem byłoby stwierdzenie istnienia spoczywającego eteru oraz ustalenie układu, w którym on spoczywa.

W3

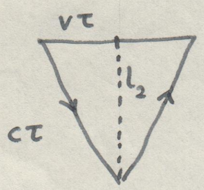
Najważniejsze spośród tych doświadczeń były doświadczenia interferencyjne, zapoczątkowane przez <u>Michelsona i Morleya</u> w 1881 r.



Zakładamy, że laboratorium porusza się względem eteru z prędkością v i że ramię AB jest skierowane równolegle do tej prędkości.

Zakładając, że obowiązuje newtonowskie prawo składania prędkości obliczamy czasy potrzebne do przejścia przez światło obu ramion interferometru w obie strony.

$$ABA: \quad \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2cl_1}{c^2-v^2}$$



$$ACA: \quad \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

droga światła w eterze, przy odbiciu promienia w C

$$\tau = \frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Różnica czasów wynosi ($\beta = \frac{v}{c}$)

$$\Delta = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2\right)$$

Jeśli teraz obrócimy interferometr o 90° to otrzymamy jako różnicę czasów

$$\Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Obserwacje M-M polegały na badaniu, czy po takim obrocie układ prążków interferencyjnych ulegnie przesunięciu, tzn. badali różnicę

$$\Delta - \Delta' = \frac{2(l_1+l_2)}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

Doświadczenia dały wynik $\Delta - \Delta' = 0$.

W4

Hipoteza Fitzgeralda - Lorentza

Aby wyjaśnić negatywny wynik doświadczeń M-M., Fitzgerald zaproponował w 1892 roku aby przyjąć, że ciała poruszające się względem eteru z prędkością v ulegają skróceniu w kierunku ruchu w stosunku $1:\sqrt{1-\beta^2}$.

Jeśli oznaczyć przez l_{10} i l_{20} długości ramion interferometru M. M. w spoczynku, to

$$\Delta = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_{10}-l_{20}\right), \quad \Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_{10}-l_{20}\right)$$

czyli

$$\Delta - \Delta' = 0.$$

M-M. brali $l_{10} \approx l_{20}$ tak że bezwzględna wartość Δ jest w ich przypadku bardzo mała.

Modyfikacją ich doświadczenia zajęli się Kennedy i Thorndike (1932), którzy skonstruowali interferometr o różnych długościach ramion, $l_1 \gg l_2$. Wówczas

$$\Delta(\beta) \cong \frac{2}{c}\left(l_{10}-l_{20}\right)\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Porównywali oni $\Delta(\beta)$ w tym samym doświadczeniu o różnych porach dnia i roku. Na skutek ruchu Ziemi prędkość βc musi być różna w różnych porach dnia i roku. Różnica wynosi

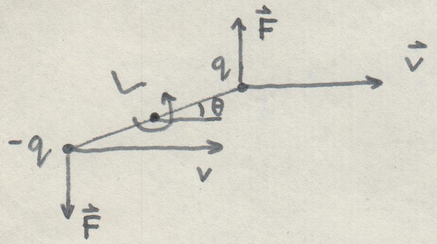
$$\Delta(\beta) - \Delta(\beta') = \frac{1}{c}\left(l_{10}-l_{20}\right)\left(\beta^2-\beta'^2\right)$$

Ale i tutaj doświadczenie dało wynik negatywny. Hipoteza Fitzgeralda-Lorentza $\Delta(\beta)-\Delta(\beta')=0$ nie tłumaczy doświadczeń K.-T.

Łatwo wytłumaczyć negatywne wyniki tych wszystkich doświadczeń jeśli przyjąć, że eter jest unoszony, wleczony przez ciała. Ale to sprzeczne z obserwowanym zjawiskiem aberracji!

W5

Innego rodzaju doświadczenie też przeznaczone do ~~z~~ wykrycia spoczywającego eteru przeprowadził **Trouton i Noble (1903)**. Idea tego jest następująca: rozpatrujemy dwa ładunki o przeciwnych znakach i równe co do wielkości, umieszczone na końcach sztywnego pręta. Całość porusza się względem eteru z prędkością $\vec{V}$.



Z praw elektrodynamiki zastosowanych do układu związanego z eterem wynika, że oprócz ~~siły~~ pola elektrycznego, którego wpływ zrównoważają się z działaniem pręta, ładunki wytwarzają pole magnetyczne, którego działanie na ładunki jest równoważne pewnemu momentowi sił, który będzie skręcał pręt tak, aby ustawił się on $\perp$ do prędkości. Moment siły: $\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{L^2}\frac{v^2}{c^2}\sin 2\theta$

Skręcenia takiego nie zaobserwowano.

Teorie emisyjne

Aby wytłumaczyć wyniki powyższych doświadczeń (MM i KT) ~~zaprop~~ nie rezygnując z mechaniki Newtona, zaproponowano teorię, w której prędkość światła w próżni wynosi c względem źródła światła.

Różne warianty tej teorii różnie odpowiadają na pytanie co się dzieje ze światłem odbitym od lustra. Wg. teorii emisyjnej Ritza (1908) jest ona nadal równa c względem źródła.

W języku zwolenników eteru oznaczałoby to, że z każdym źródłem światła związany jest jego własny eter, względem którego światło pochodzące od tego źródła rozchodzi się z prędkością c.

Teoria ta tłumaczy zarówno zjawisko aberracji gwiazd jak i wyniki doświadczeń M.M.

W6

Teorię Ritza można sformułować przy pomocy równań w sposób następujący: pola $\vec{E}$ i $\vec{H}$ spełniają

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\vec{H}$$

tzn. można je, tak jak w teorii Maxwella wyprowadzić z potencjałów φ i $\vec{A}$, ale te potencjały dane są wzorami

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,', \; t - \frac{R}{c+v_r}\right)}{R}\, dV' , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \ldots$$

gdzie v_r oznacza składową prędkości źródła (ładunku) w kierunku wektora $\vec{r} - \vec{r}\,'$.

Teoria Ritza pozostaje w sprzeczności z obserwacjami ~~[illegible]~~

Mianowicie przeprowadzono obserwacje ~~gwiazd~~ efektu Dopplera gwiazd podwójnych. Ponieważ wg. Ritza światło poruszające się od gwiazdy zbliżającej się do Ziemi i od gwiazdy oddalającej się biegną z różnymi prędkościami, wykres przesunięcia doppl. w funkcji czasu zależy od tego czy przyjąć teorię emisyjną czy nie. Obserwacje przemówiły na niekorzyść teorii emisyjnej. Wg. oszacowań de Sittera, jeśli napisać $v_{\text{światła-gwiazdy}} = c + k\, v_{gw.}$ to $k < 0.002$.

(W7)

Z opisanych tu doświadczeń wynika, że nie tylko zjawiska mechaniczne, ale również elektromagnetyczne nie wyróżniają żadnego absolutnego układu odniesienia. Einstein nadał temu stwierdzeniu rangę postulatu, który nazwał zasadą względności: prawa mechaniki i elektrodynamiki mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych. Jakkolwiek Einstein formułował tę zasadę w odniesieniu do praw mechaniki i elektrodynamiki, dziś często przez zasadę względności rozumie się stwierdzenie, że wszystkie podstawowe prawa fizyki

I mają tę samą postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Jeśli teraz przyjmiemy równania Maxwella za takie podstawowe, ważne w każdym układzie równania, to z postulatu względności będzie wynikało, że w każdym układzie inercjalnym prędkość światła wynosi c. Jednak można zbudować teorię względności na jeszcze słabszym założeniu niż

I + r. Maxwella ⇒ II

przyjęcie równań Maxwella, mianowicie na drugim postulacie Einsteina:

II prędkość światła w każdym układzie inercjalnym wynosi c i nie zależy od prędkości źródła.

Przyjęcie tych dwóch postulatów wymaga rewizji pojęć mechaniki newtonowskiej; np. II jest sprzeczne z dodawaniem prędkości.

Podział fizyki na dyscypliny, uwidaczniający się w tytułach
wykładów uniwersyteckich, jest ~~oparty na~~ wynikiem rozwoju historycznego
nauki i znacznie odbiega od metodycznego
podziału, którego można by dokonać na podstawie
obecnego stanu wiedzy. Początkujący student może
sądzić, że mechanika dzieli się na: teoretyczną,
kwantową i ośrodków ciągłych, a teoria względności gałęzią fizyki ~~podobną~~
jest ~~tak~~ ~~tego samego rodzaju~~ studiów teorii
analogiczną do wykładowej na tym samym roku
plazmy.

Teorie fizyczne ~~Fizykę~~ można dzielić z względu na różne
kryteria: przedmiot badań, metody opisu zjawisk,
stosowane przybliżenia. Jeden z tych podziałów
prowadzi do odróżniania
fizyki relatywistycznej
i
fizyki newtonowskiej
z tym, że ta druga jest właściwie szczególnym,
granicznym przypadkiem pierwszej. Fizyka relatywistyczna
obejmuje ~~za~~ większości nowoczesnej fizyki. U jej
podstaw leży opis własności czasu i przestrzeni
oraz ściśle z nim związana ~~kla~~ i elementarna dynamika cząstek.
t. kinematyka relatywistyczna

Okazuje się, że opis zjawisk grawitacyjnych wymaga zupełnie
nowych założeń o strukturze czasu i przestrzeni. W
związku z tym ~~graz zgodne~~ ~~a~~ ~~takie~~ grawitacyjne ze względu na to, bardzo
że ~~słabość~~ słabe, wiele oddziaływania fizyki relatywistycznej
uzgodnienie jest rozwijać działów całkowicie siły ~~dochodzimy~~
powszechnego ciążenia. Do ~~W~~ pomijając ~~ten sposób~~ ~~najważniejszych~~ z tych działów

2 XII poniedz. god. 8.30 Zgromadz.

~~do~~ należą

c. mechanika ośrodków ciągłych, ~~i termodynamika~~ relatywistyczna termodynamika i

d. elektrodynamika klasyczna

oraz ~~ich~~ ich uogólnienia i modele ~~[illegible]~~ ~~oraz~~ obejmowane (wraz z teorią grawitacji) mianem klasycznej teorii pola. Najważniejsze, z uwagi na liczne i precyzyjne wyniki oraz podstawowy charakter, są kwantowe teorie relatywistyczne. Wśród ~~teoria cząstek~~ ~~nasz~~ ~~poszukiwana~~ ~~pełna~~ ~~elementarnych~~ nich jest najbardziej jedyną zamkniętą teorią

e. elektrodynamika kwantowa, należy wymienić ~~[illegible]~~ teoria cząstek elementarnych, ~~Oddzielne miejsce~~ ~~to~~ ~~oddzielnej~~ ~~zajmuje~~

~~Nie~~ wymieniamy tylko we fragmentach, ~~gdy~~ choć istnieje ona na razie ~~[illegible]~~ na wyróżnienie tutaj zasługuje kinematyka reakcji (tego, co można powiedzieć o ~~reakcji~~ rozpadów i zderzeń) z których ~~[illegible]~~

Zajmuje się ona przewidywaniem przebiegu ~~[illegible]~~ między układami elementarnymi (cząstki, jądra) jedynie na podstawie ogólnych praw ~~[illegible]~~ symetrii ~~fizyki~~ czasoprzestrzeni. mechaniki kwantowej i własności

Na jej wzór budowane są modele i systemy aksjomatyczne kwantowej teorii pola; żaden z nich nie ma jednak jeszcze charakteru teorii fizycznej.

Oczywiście, wymienione tutaj ~~podstawowe~~ ~~lista~~ działy nie wyczerpują ~~Do~~ ~~[illegible]~~ ~~lub~~ rozwijanych teorii relatywistycznych; pominęliśmy ~~na niej~~ np. zagadnienia fizyki statystycznej szczególnej relatywistycznej, która ostatnio nabiera znaczenia m.in. ze względu na potrzeby astrofizyki.

Zjawiska grawitacyjne odgrywają istotną rolę w kosmologii, teorii układów gwiezdnych i planetarnych, astrofizyce.

Od ~~[illegible]~~ kilku lat ~~[illegible]~~ dziś wszystkie układa się u próby zbudowania kwantowej teorii pola grawitacyjnego, a jednak nie zostało dotychczas uwieńczone powodzeniem.

i ~~ogólniej, w~~

Podstawą ~~teo~~ fizyki relatywistycznej jest teoria względności ~~: jest~~ zajmująca się budową czasu i przestrzeni oraz ~~najprostszymi~~ prostymi fizycznymi konsekwencjami tej budowy. Zgodnie z tym określeniem, w skład teorii względności nie wchodzą szczegółowe i bogate działy fizyki relatywistycznej takie jak elektrodynamika kwantowa. Trudno jest dokładnie określić, co należy do zakresu rozważań teorii względności, a co do innych działów fizyki. Linia podziału jest uwarunkowana gustami autorów książek i wykładowców, a także ~~jest trudne~~ tradycją teorii względności.

Części teorii względności, w których opisie ~~można~~ daje się pominąć efekty grawitacyjne, nazywa się szczególną teorią względności. Można ją rozpatrywać jako ~~jest ona~~ graniczny przypadek ogólnej teorii względności, obejmującej zjawiska grawitacyjne, na którą się składa relatywistyczna teoria ~~czasoprzestrzeni~~ grawitacji, ~~i kultury~~ czasoprzestrzeni oraz jej zastosowanie ~~czasoprzestr~~ ~~kultury~~ do kosmologii. ~~a czasami~~ Tradycyjnie zwykle włącza się relatywistyczną kosmologię do ogólnej teorii względności.

Charakterystyczną cechą teorii względności jest to, że dostarcza ona modeli geometrycznych podstawowych pojęć i wielkości fizycznych związanych z czasoprzestrzenią i grawitacją. Powodzenie tych modeli skłoniło Einsteina i wielu jego naśladowców do wysunięcia programu „geometryzacji fizyki", mającego polegać na sprowadzeniu wszystkich podstawowych ~~wielkości~~ obiektów fizycznych do wielkości geometrycznych. Program ten był atrakcyjny i wydawał się możliwy do zrealizowania w początkowym okresie rozwoju teorii jedynie

względności, kiedy oddziaływanie elektromagnetyczne i grawitacyjne
były jedynymi znanymi ~~oddziaływaniami obok sił~~ grawitacyjnych
~~a~~ „siłami elementarnymi", a kwantowa natura
zjawisk atomowych nie była jeszcze w pełni wyjaśniona.
Obecnie, próby zbudowania ~~a~~ jednolitej teorii
i będą odpowiednio
straciły na aktualności. Niektóre z nich, ~~jak~~
~~pole~~ do tego tutaj przedstawione. Kleina, można rozpatrywać jako
np. teorii Kaluzy- ~~pole~~ zjawisk
pożyteczne model geometryczny geometryzacji
Ostatnio, program
elektromagnetycznych. J.A. Wheelera, który
fizyki odżył w pracach geometryczną i opartą na
stara się zbudować teorii podstawowych
na mechanice kwantowej przede wszystkim teorii
zjawisk fizycznych, a wśród
cząstek elementarnych. matematycznym teorii
Podstawowym aparatem geometria różniczkowa.
lokalna rozmaitości różniczkowej jako
względności jest z pojęcia czasoprzestrzeni i stanowi ~~ku~~ globalne
Wynika to model fizyki. Rozważania budują się model
~~po~~ zasadniczego praw Kosmologii, kiedy astrofizyka relatywistycznej,
odbicie lokalności w oraz tam zagadnienia osobliwości
mają znaczenie w Wszechświata występujących postawaniem być zasada
całego w gwiazd i fizyki ~~ma~~ rozkładu materii
w wiązki się" prawa z zdołano zrealizować
„zapadanie nielokalnego bezwładności nie jednak pewne
„Przykładem siły tej ~~ogóły~~ ona stawiano sobie pytanie,
Macha, wiążąca Zasady , odegrała „Kontinuum")
we Wszechświecie. fizycznej względności ciągłą przestrzeń" ~~Jedna~~ „z hipotezy ~~negatywnej~~ odpowiedź
„żadnej teorii teorii względności („ciągłą przestrzeń" przestrzeni
ich w rozwoju teorii czasoprzestrzeni rozmaitości i przestrzeni
Od zarania różniczkowa nowe hipotezy ~~owe~~ zjawisk
rozmaitości modelem nosi ona, że modelami przy opisie ~~istotne~~.
czy trwałym ~~dopóki~~ Może ~~ale~~ dobrymi ~~były~~ ← ~~I są istotne~~
jest ~~długo~~ to pytanie elementarnej w odległości i zmiany liniowe
na długości lokalnie. euklidesowej fizycznej nieistotne są odległości
przestrzeni których ~~w~~ od długości
dla mniejsze

I WSTĘP

Wszystkie teorie fizyczne opierają się na pewnych
założeniach co do struktury czasu i przestrzeni. Założenia
te bywają formułowane ~~sposób~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~
jawnie, jak np. w mechanice newtonowskiej lub
niektórych wyjściach
w sposób bardziej ukryty, jak w teorii macierzy
S ~~w wyjściu~~ ~~[illegible]~~ ~~Chew~~, gdzie postuluje się jedynie
niezmienniczość względem niejednorodnej grupy Lorentza,
a unika wypowiedzi na temat samej czasoprzestrzeni.
Historia powstania teorii względności pokazuje, że ~~[illegible]~~
celowa jest analiza podstawowych pojęć dotyczących
czasu i przestrzeni, a w szczególności analiza
~~tego~~ związku między tymi pojęciami i fizycznymi
obserwacjami ~~oraz~~ pomiarami oraz
Chwila zastanowienia wystarcza, aby się ~~przekonać~~
zdać sobie sprawę z tego, że wcale nie jest łatwo
bezpośrednio uzasadnić wszystkie szczegóły matematycznych na podstawie obserwacji.
modeli przestrzeni i czasu najbardziej ~~pod~~ fundamentalnych
Dotyczy to ~~szczególnie~~ przede wszystkim topologii i struktury
założeń na temat Źródła tych trudności
różniczkowej czasoprzestrzeni. ~~tego~~ pojęciu zdarzenia —
można dopatrywać się w jedynie szeroko
czegoś, o czym ~~można~~ daje się powiedzieć Pojęcie to jest ~~ma ono sens~~
gdzie i kiedy zaszło. Einsteina, jednak wszystkich
używane od czasów w istocie występuje ono we przedrelaty-
~~na gruncie~~ dotychczasowych teoriach, również
wistycznych.

2.

Stanowi ono wynik idealizacji podobnej do tej, która prowadzi do pojęcia punktu materialnego. Idealizacja ta dobrze odpowiada ~~pojęciom~~ fizyce klasycznej z jej obrazem materii w postaci ośrodka ciągłego, nieograniczenie podzielnego i opisywanego przy pomocy lokalizowalnych wielkości, takich jak gęstość masy i ładunku, prędkość oraz ~~temperatura~~ natężenie pola elektrycznego. ~~itp.~~ Wiele osób uważa, że klasyczne pojęcie zdarzenia i związana z nim struktura czasoprzestrzeni nie jest zgodna ~~odpowiada~~ z kwantową naturą zjawisk mikroświata. Dotychczas jednak nikomu nie udało się podać istotnie nowego, ~~odpowiadającego~~ biorącego pod uwagę atomową ~~st~~ budowę materii, podejścia do struktury czasu i przestrzeni. W dalszym ciągu przyjmiemy ~~ograniczymy się do~~ pojęcie zdarzenia w znaczeniu klasycznym i przeanalizujemy strukturę czasoprzestrzeni w różnych teoriach. Będziemy przy tym używali języka ~~terminologii~~ teorii względności (zdarzenie, czasoprzestrzeń, linia świata) choć początkowa część rozważań będzie dotyczyć teorii przedrelatywistycznych. Postępowanie takie jest celowe, gdyż ułatwia porównanie ~~różnych~~ rozmaitych teorii oraz pozwala na dokładne prześledzenie zmian, jakie ~~które do dot~~ Einstein wprowadził do starych koncepcji czasu i przestrzeni.

Zbiór E wszystkich możliwych zdarzeń nazywa się czasoprzestrzenią. Na podstawie obserwacji sądzimy, że w zbiorze tym określona jest pewna naturalna topologia 1) oraz struktura różniczkowa taka, że E jest ~~Oznacza~~ czterowymiarową rozmaitością różniczkową. Wynika stąd, że można wprowadzać w E układy odniesienia, przy pomocy których zdarzeniom ~~opisuje się~~ przypisuje się cztery współrzędne (liczby), np. x, y, z i t. Ruch punktu

---

1) S. Woronowicz w pracy „Przestrzenie kauzalne" pokazał w jaki sposób własności topologiczne czasoprzestrzeni można wyprowadzić z zespołu aksjomatów ~~interpretowalnych~~ posiadających interpretację fizyczną i w zasadzie sprawdzalnych przy pomocy obserwacji.

materialnego wyznacza w czasoprzestrzeni krzywą ~~która~~ zwaną ~~nazywa się~~ linią świata tego punktu. Inaczej mówiąc, linia świata jest to zbiór zdarzeń, które są udziałem pewnego punktu materialnego. Na podstawie obserwacji wiemy, że układ odniesienia można wybrać tak, aby ~~linie~~ ~~świata~~ ~~dały się przedstawić w postaci~~ jedna ze współrzędnych, np. t, służyła za parametr do opisu wszystkich linii świata. W dalszym ciągu będzie mowa wyłącznie o układach z wyróżnioną w ten sposób współrzędną t, zwaną czasem. Pozostałe trzy współrzędne nazywa się przestrzennymi. Mając układ odniesienia, można mówić o zdarzeniach równoczesnych – są to zdarzenia o ~~wspólnej~~ tej samej wartości współrzędnej czasowej t. ~~Tak~~ Tak określona równoczesność zależy od układu współrzędnych, a ~~jak~~ więc ~~taka~~ ma charakter umowny. W dalszym ciągu będziemy się zastanawiali w jaki sposób na drodze fizykalnej można ustalić relacji równoczesności ~~określić~~

Elementy układu odniesienia, służące do określenia współrzędnej t nazywa się zegarami. Wygodnie jest myśleć o zegarze jako o punkcie materialnym, który spoczywa (tzn. ma stałe wartości współrzędnych przestrzennych) i jest zaopatrzony we wskazówkę współrzędnej t.

Powyższe uwagi mają zupełnie ogólny charakter i ~~wyrażają~~ ~~własnos~~ zawierają opis własności czasoprzestrzeni wspólnych dla wszystkich dotychczasowych teorii. Obecnie wykluczymy z rozważań zjawiska grawitacyjne i opiszemy je tworzą – temu tematowi poświęcony jest rozdział VI. Doświadczenie mówi, że jeśli pominąć zjawiska grawitacyjne, to można wyodrębnić klasę układów odniesienia, zwanych inercjalnymi, scharakteryzowanych przez to, że swobodne punkty materialne poruszają się względem tych układów prostoliniowo i bez przyśpieszeń. Dokładniej, według pierwszej zasady Newtona istnieje wyróżniona rodzina ruchów swobodnych oraz rodzina inercjalnych układów odniesienia, ~~zwanych~~ o tej własności, że dla ruchów swobodnych zachodzi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

lub krótko

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 .$$

Oznacza to, że każda współrzędna przestrzenna linii świata ruchu swobodnego, odniesionego do układu inercjalnego jest liniową funkcją czasu — ruchom swobodnym odpowiadają *proste linie świata*. O zegarach odmierzających czas w układach inercjalnych mówi się, że biegną *równomiernie*. Zbiór zdarzeń równoczesnych względem pewnego układu inercjalnego jest tym, co zwykle nazywa się *przestrzenią*. Na podstawie doświadczenia przyjmuje się, że przestrzeń jest *euklidesowa*, tzn. iż współrzędne układu inercjalnego można wybrać tak, aby kwadrat odległości dwóch dowolnych punktów przestrzeni, o współrzędnych $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ wynosił

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 .$$

Fizyka newtonowska, tzn. fizyka przedrelatywistyczna, oparta na mechanice Newtona, zakładała ponadto, że istnieje *czas absolutny*, to jest współrzędna t, jednakowa dla wszystkich układów inercjalnych. Założenie to było wyrazem przekonania, że zegary należące do różnych układów odniesienia można zsynchronizować. Przez synchronizację zegarów rozumie się tutaj takie ustalenie ich biegu, aby dowolne dwa zegary zgodnie wskazywały czas zdarzenia polegającego na przecinaniu się ich linii świata, czyli koincydencji zegarów. Na podstawie tych założeń, w wykładzie mechaniki pokazuje się, że współrzędne w dwóch układach inercjalnych $K(\vec{r}, t)$ i $K'(\vec{r}', t')$ powiązane są *przekształceniem Galileusza*

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t \quad , \quad t' = t ,$$

gdzie $\vec{V}$ jest wektorem prędkości układu K' względem K. Tutaj i w dalszym ciągu niniejszego rozdziału, celem uproszczenia, zakładamy, że osie przestrzenne obu układów są równoległe ~~i ruch odbywa się w kie~~ a w chwili $t=0$ początki przestrzeni układów pokrywają się.

Doświadczenie uczy, że ruch ciał jest określony przez działające na nie siły (druga zasada dynamiki). W przybliżeniu niewielkich prędkości siły te zależą jedynie od odległości między ciałami ~~i podlegają zasadzie równości) akcji i reakcji~~. Wynika stąd, że równania ruchu ~~punktów materialnych~~, mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych. Na tej podstawie, w fizyce newtonowskiej formułuje się następującą zasadę względności Galileusza: zjawiska mechaniczne przebiegają jednakowo we wszystkich układach inercjalnych, a równania ruchu ciał są niezmiennicze względem przekształceń Galileusza.

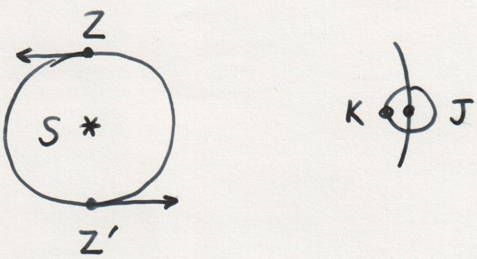
Nasuwa się pytanie, które w pełnej ostrości sformułował Einstein, w jaki sposób można w rzeczywistości zsynchronizować zegary, albo jak sprawdzić, że dwa odległe zdarzenia zachodzą równocześnie „w sensie czasu absolutnego". Do XVII w. sądzono, że światło rozchodzi się momentalnie; pogląd taki głosił np. Descartes. Gdyby tak było, absolutną równoczesność ~~zd~~ zdarzeń można by określić przy pomocy sygnałów świetlnych.

3.~~10~~.

6.

~~3. Podstawy fizyczne szczególnej teorii względności~~

Jednym z najważniejszych odkryć, bez którego powstanie nowoczesnej fizyki i teorii względności nie byłoby możliwe, ~~było~~ polegało na stwierdzeniu istnienia skończonej prędkości rozchodzenia się światła. Dokonał tego w r. 1675 duński astronom O. Römer na podstawie wyników obserwacji ruchów księżyców Jowisza. Otrzymał on ~~...~~ zadziwiająco ~~dobrą~~ dokładną wielkość prędkości światła: 310 000 km/sek.



Rys. 1
Römer stwierdził, że okresy między zaćmieniami księżyca K wydają się być krótsze, gdy Ziemia znajduje się w punkcie Z', niż gdy znajduje się w punkcie Z.

Z XVII w. datują się również pierwsze teorie światła: teoria korpuskularna Newtona i teoria falowa Huyghensa. Teoria korpuskularna ~~jest~~ była powszechnie uznawana aż do samego końca XVIII w. Np. J. Bradley, który odkrył w r. 1728 zjawisko aberracji wytłumaczył ~~z~~ Teorią je na gruncie teorii korpuskularnej, zgodnie z ~~tym, co zostało przedstawione w poprzednim paragrafie. W tym wypadku przez eter należy rozumieć układ inercjalny, względem którego spoczywa źródło promieniowania (gwiazda).~~ klasycznym prawem dodawania prędkości.

W r. 1799 Young skrytykował teorię korpuskularną, zarzucając jej to, że nie tłumaczy niezależności prędkości światła od jego natężenia. W r. 1818 ~~...~~ Fresnel wytłumaczył zjawiska dyfrakcji, interferencji oraz polaryzacji światła na gruncie teorii falowej, natomiast Young przy jej pomocy wyjaśnił zjawiska aberracji. W tym celu przyjmowali oni, że światło polega na rozchodzeniu się drgań w spoczywającym, uniwersalnym ośrodku – eterze. Hipoteza taka oznaczała wprowadzenie nowego elementu

(O eterze ~~pisa~~ pisał, ale w nieco innym znaczeniu, jeszcze Descartes)

nie występującego w mechanice Newtona.

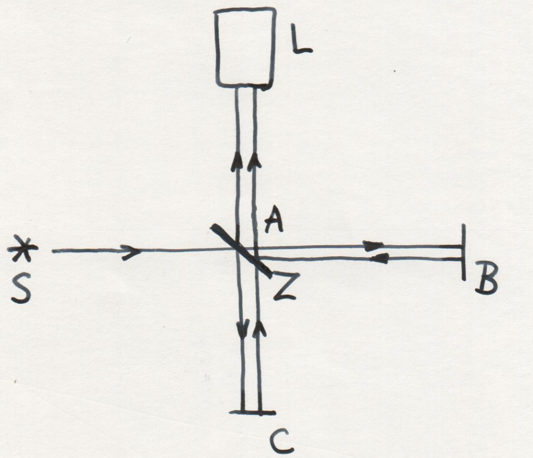
Z drugiej strony łatwo widać, że zasada względności Galileusza nie może dotyczyć zjawisk ~~elektromagnetycznych~~, takich jak rozchodzenie się światła. Istotnie,

~~4~~. 7. Typowa składowa pola ~~elektromagnetycznego~~ fali świetlnej, biegnącej w układzie K w kierunku osi x z prędkością c ma postać $f(x-ct)$. Ta sama składowa, wyrażona w funkcji współrzędnych układu K' poruszającego się względem K z prędkością V w kierunku osi x jest $f(x'-c't')$, tzn. odpowiada fali, poruszającej się względem K' z prędkością $c'=c-V$. Równania ~~elektromagnetyzmu~~ rządzące światłem nie mogą więc mieć tej samej postaci w różnych układach inercjalnych, jeśli prawdą jest, że przy przechodzeniu z jednego układu do drugiego obowiązują przekształcenia Galileusza. Maxwell wprowadził do równań elektromagnetyzmu przed przeszło stu laty pojęcie eteru i dzięki czemu mógł przewidzieć istnienie fal elektromagnetycznych i stwierdzić, że pojęcie to obejmuje fale świetlne.

Od czasów Maxwella do 1905 r. przyjmowano, że wszystkie fale elektromagnetyczne rozchodzą się w ~~e~~ eterze ~~kosmicznym~~ — ośrodku, wypełniającym całą przestrzeń i odgrywającym dla światła rolę podobną do tej, jaką dla dźwięku spełnia powietrze. Układ inercjalny K, względem którego eter miał spoczywać, był układem wyróżnionym. Przyjmowano, że równania ~~M~~ Maxwella obowiązują w tym układzie, a zatem że światło rozchodzi się w próżni z prędkością c względem K, natomiast w innych układach inercjalnych prędkość światła różni się od c i można ją określić przy pomocy klasycznego prawa składania prędkości. W związku z tym poglądem, prowadzono badania zmierzające do wyznaczenia układu związanego z eterem. ~~Wśród nich, najważniejsze były doświadczenia interferometryczne~~ → Michelsona-Morleya, mające za cel wykrycie ruchu Ziemi względem eteru. Wbrew oczekiwaniom, wyniki tych doświadczeń były negatywne: prędkość światła mierzona na powierzchni Ziemi nie zależy od ~~kierunku promieni świetlnych~~ ani od pory roku, ~~mimo~~ że

Wśród nich, najważniejsze były doświadczenia interferometryczne Michelsona - Morleya 1), zapoczątkowane 1881 r. i mające za cel wykrycie ruchu Ziemi względem eteru.

~~drugiego poglądem Newtona i nie występującego w jego~~ mechanice ~~(§1)~~. Newtona
~~Narzucała się zatem potrzeba wykonania doświadczeń, których celem byłoby stwierdzenie istnienia oraz identyfikacja eteru - wyróżnionego układu inercjalnego. Najważniejsze wśród tych doświadczeń, zmierzające do wykrycia ruchu Ziemi względem eteru, wykorzystywały zjawisko interferencji światła i były zapoczątkowane przez Michelsona i Morleya w 1881 r. 1)~~ Schemat tych doświadczeń jest przedstawiony na rys. 2. Promienie światła ze źródła S padają na półprzezroczyste zwierciadło Z, częściowo odbijając się, a częściowo przenikając i trafiają do luster B i C. Po odbiciu, światło trafia do L, gdzie obserwuje się prążki interferencyjne.

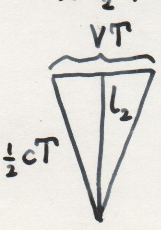


Rys. 2

Załóżmy, że laboratorium porusza się względem eteru z prędkością V i że ramię AB jest skierowane równolegle do tej prędkości. Jeśli obowiązuje newtonowskie prawo składania prędkości, to czas potrzebny do przejścia przez światło drogi ABA wynosi

$$\frac{l_1}{c+V} + \frac{l_1}{c-V} = \frac{2cl_1}{c^2-V^2}$$

Natomiast czas T potrzebny do przejścia drogi ACA wynosi $2l_2/\sqrt{c^2-V^2}$ (patrz rys. 3). Różnica tych czasów jest równa



Rys. 3

$$\Delta = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2\right)$$

gdzie $\beta = V/c$. Jeśli obrócić ramiona interferometru

1) A.A. Michelson and E.W. Morley, Amer. J. Sci., 34 (1887) 333

o 90°, to jako różnicę odpowiednich czasów przejścia otrzymuje się

$$\Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Obserwacje Michelsona i Morleya polegały na badaniu, czy przy takim obrocie układ prążków interferencyjnych ulega przesunięciu, tzn. sprowadzały się do pomiaru różnicy

$$\Delta - \Delta' = \frac{2(l_1+l_2)}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

Z dużą dokładnością i niezależnie od pory roku otrzymano wynik $\Delta - \Delta' = 0$.

Celem wyjaśnienia negatywnego wyniku doświadczeń Michelsona i Morleya, w 1892 r. FitzGerald i Lorentz[1] niezależnie zaproponowali, aby przyjąć, że ciało poruszające się względem eteru z prędkością $V = \beta c$ ulega skróceniu w kierunku ruchu w stosunku $1 : \sqrt{1-\beta^2}$. Istotnie, jeśli oznaczyć przez l_{10} i l_{20} długości ramion interferometru w spoczynku względem eteru i przyjąć hipotezę FitzGeralda - Lorentza, to

$$\Delta = \Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left(l_{10} - l_{20}\right)$$

Michelson i Morley używali interferometru o niemal równych długościach ramion, $l_{10} \approx l_{20}$, co tłumaczy bardzo niewielką obserwowaną przez nich bezwzględną wartość przesunięcia Δ.

Modyfikacją doświadczenia Michelsona i Morleya, zmierzającą do sprawdzenia hipotezy FitzGeralda - Lorentza, zajęli się Kennedy i Thorndike[2]. Użyli oni interferometru o różnych długościach ramion, $l = l_1 \gg l_2$. W tym wypadku, przyjmując hipotezę skrócenia długości,

$$\Delta(\beta) \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

1) H.A. Lorentz, Zittingsverlagen d. Akad. v. Wet. (Amsterdam), 1892-93, str. 74; zob. też tegoż autora „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Leiden, 1895.

2) R.J. Kennedy and E.M. Thorndike, Phys. Rev. 42 (1932) 400.

Kennedy i Thorndike porównywali $\Delta(\beta)$ w tym samym układzie w różnych porach dnia i roku. Jeśli istnieje eter i obowiązuje założenie użyte do wyprowadzenia ostatniego wzoru (~~13~~), to, na skutek ruchu Ziemi, wielkość $\Delta(\beta)$ powinna zależeć od pory pomiaru, czego nie stwierdzono. Innymi mówiąc, doświadczenia Kennedy'ego-Thorndike'a pokazują, że sama hipoteza skrócenia długości nie wystarcza, aby uratować teorię spoczywającego eteru.

Łatwo natomiast wytłumaczyć negatywne wyniki doświadczeń interferencyjnych przyjmując, że eter jest unoszony, wleczony przez ciała. Przy tym założeniu, prędkość światła względem laboratorium jest w każdych warunkach taka sama. Z drugiej strony, hipoteza eteru unoszonego jest sprzeczna z obserwowanym zjawiskiem aberracji. Ponadto, trudno ją pogodzić z obecnymi poglądami na mikroskopową budowę materii. Podobna uwaga stosuje się do teorii eteru częściowo unoszonego przez ciała *1)

---

*1) Wyczerpującą analizę tego problemu można znaleźć w wykładzie L.I. Mandelsztama o fizycznych podstawach teorii względności (t. V Pełnego Wydania Dzieł L. I. Mandelsztama, Wyd. Akad. Nauk ZSRR, 1950).

Stosunkowo najtrudniejszą do obalenia próbą ratowania fizyki Newtona jest teoria emisyjna światła. Stanowi ona unowocześnioną wersję teorii korpuskularnej i orzeka, że prędkość światła w próżni wynosi c względem źródła światła.

Różne warianty tej teorii różnie odpowiadają na pytanie, co dzieje się ze światłem odbitym od poruszającego się lustra. Według teorii emisyjnej Ritza ~~(1908)~~[1] prędkość światła jest nadal równa c względem „pierwotnego" źródła światła. W języku zwolenników eteru oznacza to, że z każdym źródłem światła związany jest jego własny eter, względem którego światło, pochodzące od tego źródła, rozchodzi się z prędkością c. Teoria ta tłumaczy zarówno zjawisko aberracji, jak i wyniki doświadczeń interferencyjnych. Trudno ją natomiast pogodzić z nowoczesnymi poglądami na mechanizm emisji światła, nierozróżnialność jednakowych cząstek itp. Ponadto, teoria Ritza pozostaje w sprzeczności z obserwacjami efektu Dopplera w gwiazd podwójnych[2] ~~(De Sitter, 1913)~~.

W ten sposób dochodzimy do sprzeczności, z jednej strony między pozorną koniecznością wprowadzenia eteru do opisu zjawisk elektromagnetycznych a brakiem jakichkolwiek danych doświadczalnych na rzecz istnienia eteru, i, z drugiej strony, między newtonowskim prawem składania prędkości a niezależnością prędkości światła od ruchu. W pełni zadowalające rozwiązanie tej trudności dał dopiero Einstein w pracy z 1905 r. pt. Zur Elektrodynamik bewegter Körper (Annalen der Physik, 17, str. 891). Istota tego rozwiązania polega na odrzuceniu eteru, jako pojęcia pozbawionego znaczenia fizycznego i na odpowiednim przebudowaniu mechaniki.

~~Z rozważań poprzedniego paragrafu wiemy, że prawa optyki implikują istnienie iloczynu skalarnego g o sygnaturze (3,1), oraz to, że skoro odrzucamy eter, musimy zrezygnować z czasu absolutnego i metryki przestrzennej h. Iloczyn skalarny Minkowskiego g pozostaje jedynym absolutnym elementem geometrycznej struktury czasoprzestrzeni.~~

1) W. Ritz, Ann. Chim. Phys., 13 (1908) 145.

2) R.C. Tolman, Phys. Rev. 31 (1910), 26; W. de Sitter, ~~Amsterdam Proc.~~ Proc. Acad. Sci. (Amsterdam), 15 (1913), 1297 i Phys. Z. 14 (1913), 429; zob. także G. Wataghin, Z. f. Physik, 40 (1926) 378.

12. Dla ścisłości, należy ~~Warto~~ zwrócić uwagę na to, że Einstein w

~~w 1905 nie znał jeszcze~~ czasie pracy nad podstawami swojej teorii nie znał negatywnych wyników doświadczeń Michelsona-Morleya 1).

---

1) Wzmianka na ten temat można znaleźć

W swoim rozumowaniu opierał się on jedynie na tym, że przebieg dowolnych zjawisk elektromagnetycznych, przynajmniej w pierwszym przybliżeniu, nie ulega zmianie jeśli w tych zjawiskach ciała biorące udział w ... prąd elektryczny

Kt. 13.

[Przeprowadzona przez Einsteina analiza pojęcia równoczesności doprowadziła do porzucenia koncepcji ~~T. w. obalił również pojęcie~~ czasu absolutnego.

Einstein zwrócił uwagę na to, że synchronizacja zegarów jest czynnością fizyczną, wymagającą przesyłania sygnałów, a relacja ~~pojęcie~~ równoczesności odległych zdarzeń oraz wielkość odstępu czasu między nimi zależy od układu odniesienia. Istotnie, niech będą dane dwa układy inercjalne K i K' poruszające się względem siebie z prędkością **V**. W każdym z tych układów spoczywa obserwator zaopatrzony w równomiernie biegnący zegar. Obserwatorzy mogą wysyłać do siebie sygnały radiowe lub świetlne oraz informować się przy ich pomocy o wskazaniach swoich zegarów. Położenia obserwatorów pokrywały się w pewnej chwili (zdarzenie O), która została przyjęta za początek odmierzania czasu przez oba zegary. Obserwator z układu K (krótko: obserwator K) w chwili t_1, wskazywanej przez jego własny zegar, wysyła sygnał do obserwatora K', który natychmiast odwzajemnia się na drodze radiowej informacją o tym, że jego zegar w chwili odbioru sygnału pokazywał t'. Wreszcie, niech t_2 będzie czasem wskazywanym przez zegar obserwatora K w chwili odbioru drugiego sygnału. Związki zachodzące między zdarzeniami tego rodzaju wygodnie jest przedstawić przy pomocy diagramów czasoprzestrzennych. W diagramie na rys. 4 linie ciągłe obrazują linie świata obserwatorów, a linie przerywane odpowiadają sygnałom świetlnym. Jest jasne, że t' jest proporcjonalne do t_1, $t' = \alpha t_1$, podobnie $t_2 = \alpha' t'$. Na mocy zasady względności

Rys. 4

$t' = \alpha t_1$,
$t_2 = \alpha' t'$

Einsteina sytuacja obu obserwatorów jest jednakowa, zatem $\alpha = \alpha'$, czyli $t_2 = \alpha^2 t_1$. Pamiętając, iż prędkość fali elektromagnetycznej nie zależy od ruchu źródła, obserwator K zdecyduje, że zdarzenie polegające na wskazaniu przez jego zegar czasu $\frac{1}{2}(t_1+t_2) = \frac{1}{2}(\alpha^2+1)t_1$ jest równoczesne z wysłaniem sygnału przez obserwatora K'. Obserwator związany z układem K uzna więc za równoczesne dwa zdarzenia, których współrzędne czasowe względem K i K' są różne (chyba, że $\alpha = 1$, co odpowiada $V = 0$). Ponadto $t' = \alpha t_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha^2+1)t_1 = t$, tzn. zegar układu K' spóźnia się z punktu widzenia K. Zjawisko to nosi nazwę dylatacji czasu. Zamieniając obserwatorów rolami, widać, że obserwator K' również stwierdzi opóźnianie się zegara układu K względem własnego. Współczynnik α posiada proste znaczenie fizyczne: jest on równy stosunkowi częstości fali elektromagnetycznej wysyłanej z K do częstości tej samej fali odbieranej w K' (p. rozdz. III).

Wartość α można obliczyć pamiętając, że K' porusza się z prędkością V względem K, a zatem w czasie $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ pokonuje drogę $\frac{1}{2}(\alpha^2+1)Vt_1$. Tę samą drogę światło przebiega z prędkością c w czasie $\frac{1}{2}(t_2-t_1)$. Otrzymuje się

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \text{gdzie} \quad \beta = \frac{V}{c},$$

a stąd wzór na dylatację czasu, $t' = t\sqrt{1-\beta^2}$.

Konsekwencją dylatacji czasu jest pozorny „paradoks bliźniąt". Polega on na tym, że zgodnie z przewidywaniami teorii względności jeden z braci bliźniąt

(To jest uczony moment w rozumowaniu: podajemy tutaj einsteinowski przepis na synchronizację zegarów należących do określonego, inercjalnego układu odniesienia).

~~8.~~ 15. wysłany rakietą w podróż kosmiczną, po powrocie na Ziemię znalazłby, iż jego brat postarzał się bardziej niż on ~~sam~~. Paradoks znika gdy zauważymy, że bliźniak pozostający na Ziemi spoczywa w układzie inercjalnym, a jego brat doznaje przyspieszeń w czasie lotu – ich role nie są więc symetryczne. V

V (Oczywiście, nie należy tego paradoksu traktować zbyt poważnie: rozumowanie powyższe pomija wpływ przyspieszeń na „zegar biologiczny", jakim jest człowiek. Przeżycia związane z podróżą, spowodują zapewne, że kosmonauta bardziej się postarzeje niż jego ~~bliźniak pozostały~~ brat wiodący wygodne życie na Ziemi).

W fizyce newtonowskiej ma miejsce względność położeń przestrzennych: aby zwrot „w tym samym miejscu" miał sens w stosunku do zdarzeń nierównoczesnych, należy określić układ odniesienia. Np. ustalając spotkanie na jutro w tym samym miejscu mamy na myśli: w układzie związanym z Ziemią. W stosunku do Słońca Ziemia, a więc i miejsce spotkania, przemieszcza się w ciągu doby o ok. 2 600 000 km. W teorii Einsteina równoczesność, a także kolejność czasowa niektórych par zdarzeń jest względna (zależna od układu odniesienia).

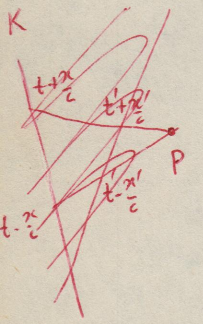
Przekształcenia Lorentza. Łatwo jest znaleźć związki między współrzędnymi dowolnych zdarzeń względem układów inercjalnych K i K'. Niech x będzie odległością od obserwatora K zdarzenia P, leżącego w czasoprzestrzeni E w płaszczyźnie wyznaczonej przez linie świata przecinające się obserwatorów K i K'. Odpowiednio, niech x' oznacza odległość P od obserwatora K'. Niech t oznacza wskazanie zegara układu K w chwili równoczesnej ~~~~ K, a t' – z P z punktu widzenia układem K'. analogiczną wielkość związaną z

Rys. 5

Sygnał świetlny, wysłany przez obserwatora K

9.

16. w chwili $t - x/c$ trafi do P, a obserwatora K' osiągnie wtedy, gdy zegar tego ostatniego będzie wskazywał $t' - x'/c$. Podobnie dzieje się z sygnałem wysłanym przez obserwatora K' w chwili $t' + x'/c$. Otrzymuje się (patrz rys. 5)

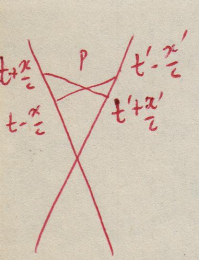


$$t' - x'/c = \alpha(t - x/c) \quad , \quad t + x/c = \alpha(t' + x'/c)$$

a stąd wynika postać przekształceń Lorentza

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

oraz niezmienniczość kwadratu interwału czasoprzestrzennego s zdarzeń P i O



$$s^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

zmienić znaki na rysunku!

W czterowymiarowej czasoprzestrzeni teorii względności interwał zdarzeń odgrywa rolę analogiczną do roli odległości w przestrzeni euklidesowej. Przekształcenia Lorentza są odpowiednikiem obrotów. Czasoprzestrzeń z tego rodzaju interpretacją geometryczną interwału nosi nazwę ~~przestrzeni~~ świata Minkowskiego.

Dla $\beta \ll 1$ wzory Lorentza sprowadzają się do ~~przechodzą w~~ przekształceń Galileusza, co wiąże się z tym, że fizyka relatywistyczna, tzn. fizyka oparta na zasadzie względności Einsteina, ~~dla zjawisk obejmujących~~ w granicy niewielkich prędkości daje wyniki zgodne z fizyką newtonowską.

Na podstawie przekształceń Lorentza można uzasadnić, oprócz zjawiska dylatacji czasu

Literatura

Oprócz pozycji cytowanych w tekście rozdziału, następujące książki i artykuły mogą być pomocne w uzyskaniu obrazu historii, ~~i~~ podstaw i doświadczalnego potwierdzenia szczególnej teorii względności:

1. A. Einstein, Istota teorii względności, Warszawa 1961

3. W. Pauli, Theory of Relativity, London 1958

2. ~~A. Einstein~~ H.A. Lorentz i in., The principle of relativity (zbiór artykułów Lorentza, Einsteina, Minkowskiego i Weyla), Dover Publications, Inc.

4. E. Whittaker, A history of the theories of aether and electricity, ~~New York 1960~~ London 1951

5. H.P. Robertson, „Postulat versus Observation in the Special Theory of Relativity", Revs. Mod. Phys., 21 (1949) 378.

6. „Conference on the Michelson-Morley Experiment" Astrophys. J. 68 (1928), 341

7. R. Lennuier, „Quelques vérifications expérimentales récentes de la théorie de la relativité restreinte," Rev. Sci. (Paris) 85 (1947) 740

8. R.S. Shankland i in. ~~S.W. McCuskey, F.C.~~, „New Analysis of the Interferometer Observations of D.C. Miller," Revs. Mod. Phys. 27 (1955) 167.

Dobrze robi się tylko to, co się lubi!

Powinno dać się czytać - przynajmniej miejscami

Zadania
Zagadnienia

Przewodnik po literaturze

Skorowidz {terminów, oznaczeń / typu Bourbaki

Tematy

Landau i Lifszic
Rindler
Pauli
M.T.Wheeler
Hawking-Ellis
Witten
Brandeis
Battelles
Les Houches 1960
" " 1972

elementy t. wzgl. ss w fizyce ogólnej

I WSTĘP

II PODSTAWY SZ. T. WZGL

1. dwuwymiarowa p. Minkowskiego
2. kinematyka i dynamika relatywistyczna

III GEOMETRIA

1.
2...

IV KLASYCZNA TEORIA PÓL I CZĄSTEK

RELATYWISTYCZNA MECH. KWANTOWA

~~PODSTAW~~
RELATYWISTYCZNA TEORIA GRAWITACJI

EW. KOSMOLOGIA
ASTROFIZYKA RELAT.
OŚRODKI CIĄGŁE

TEORIA E-C

II PODSTAWY SZCZEGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

1. Czas i przestrzeń w fizyce
2. Zasada względności
3. Czasoprzestrzeń dwuwymiarowa
4. Szczególne przekształcenia Lorentza
5. Przestrzeń Minkowskiego
6. Czas własny i paradoks bliźniąt
7. Aberracja światła
8. Prędkość i przyśpieszenie
9. Energia i pęd
10. Dynamika relatywistyczna.
11. Rozpady i rozpraszanie cząstek
12. Przestrzeń prędkości.

II. 1

II Podstawy szczególnej teorii względności

1. Czas i przestrzeń w fizyce.

Wspólną cechą wszystkich zjawisk fizycznych jest to, że odbywają się w czasie i zachodzą w przestrzeni. Każdemu wydarzeniu można przypisać czas trwania albo charakterystyczny dla niego okres, oraz przyporządkować mu obszar przestrzeni, w którym ono zachodzi. Stosunki czasowe i przestrzenne leżą u podstaw całej fizyki, gdyż dotyczą ~~tego~~ tych cech zjawisk, które są wspólne dla różnych rodzajów oddziaływań i różnych skal wielkości. Możemy mówić o rozmiarach atomu i porównywać je z ~~ich~~ rozmiarami całej Galaktyki, mimo że atomy podlegają prawom mechaniki kwantowej, podczas gdy galaktyki są obiektami klasycznymi, a o ich budowie decydują siły grawitacyjne.

Nasze wyobrażenia o czasie i przestrzeni zmieniają się wraz z rozwojem fizyki. Dwie najważniejsze rewolucje w tej dziedzinie zawdzięczamy Einsteinowi. Pierwsza z nich polegała na rozszerzeniu zasady względności na wszystkie zjawiska fizyczne, co doprowadziło do obalenia czasu absolutnego i powstania tzw. szczególnej teorii względności (1905). Druga rewolucja wiąże się z opisem zjawiska ciążenia powszechnego w ramach teorii względności (1915). Relatywistyczna teoria ~~p~~ grawitacji przewidziała zakrzywienie czasoprzestrzeni w pobliżu ciał niebieskich takich jak Słońce, co zostało potwierdzone obserwacjami. ~~Teoria ta nie przyniosła dotychczas niczego nowego na temat budowy przestrzeni w skali mikroświata, na odległościach rzędu jądrowych atomowych lub jądrowych.~~ Mimo czynionych licznych prób w tym kierunku, nie udało się dotąd powiedzieć niczego istotnie nowego na temat budowy przestrzeni ~~na małych~~ w skali mikroświata, tam na odległościach jądrowych. Wiele wskazuje na to, że obowiązuje tam geometria przestrzeni Minkowskiego.

II. 2.

Czym właściwie jest czas i przestrzeń dla fizyka? Nie można spodziewać się, aby tak podstawowe pojęcia dały się określić według klasycznej formuły per genus proximum et differentia specifica. Rozpatrywane w fizyce pojęcia i wielkości powinny

1. odpowiadać rzeczywistości przy pomocy pomiarów (w najprostszym wypadku i dać się zmierzyć) oraz
2. znajdować wyraz w modelach matematycznych, używanych do opisu zjawisk.

Odstępy czasu i odległości przestrzenne można mierzyć przez porównywanie z pewnymi odstępami i odległościami, uznanymi za wzorcowe. Przed Einsteinem, sposób pomiaru odstępu czasu między rozdzielonymi przestrzennie zdarzeniami nie budził wątpliwości. Sądzono, że istnieje jedna idealna ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ metoda pomiaru, która daje ten sam wynik, niezależnie od ruchu obserwatora wykonującego pomiar. Mówiono w związku z tym, że czas jest absolutny, w przeciwieństwie do stosunków przestrzennych, które są względne, gdyż zależą od układu (obserwatora) używanego do ich opisu. Nie wchodząc w szczegóły, poprzestaniemy na stwierdzeniu, że stosunki czasowe i przestrzenne między zdarzeniami fizycznymi można ujmować liczbowo dokonując pomiarów, które na ogół wymagają udziału ciał (zegarów, prętów, źródeł światła) innych niż te, które towarzyszą zjawiskom, będącym przedmiotem pomiaru. Innymi słowy, wyniki pomiarów ~~zjawiskach~~ zależą także od obserwatora wykonującego pomiar, a więc są względne.

Wielkim osiągnięciem fizyki jest to, że w jej ramach potrafimy budować modele matematyczne zjawisk. Przy pomocy tych modeli można trafnie przewidywać przebieg zjawisk — a więc wyniki wielu pomiarów — na podstawie niewielkiej liczby danych i pomiarów. U podstaw każdej teorii fizycznej leżą założenia na temat czasu i przestrzeni. Dadzą się one zawsze sprowadzić do wypowiedzi typu „modelem czasu i przestrzeni jest przestrzeń (zbiór) o następujących własnościach (dodatkowych strukturach geometrycznych): ...”. Opis modelu dany jest (albo może być dany) w języku czystej matematyki, z właściwą tej nauce ścisłością i stopniem abstrakcji. Często wręcz utożsamia się fizyczną przestrzeń i czas z modelami. Czynimy to na przykład mówiąc, że otaczająca nas przestrzeń jest euklidesowa, albo że według Einsteina czasoprzestrzeń jest rozmaitością riemannowską. Sformułowania takie nie są ścisłe, ale wygodne, i będziemy ich tu często używali.

Modele matematyczne zjawisk powinny odpowiadać rzeczywistości, a więc dopuszczać interpretację fizyczną. Rozumiemy przez to zespół przepisów ustalających odpowiedniość między liczbami, jakie można otrzymać ~~na drodze~~ w ramach modelu przy pomocy matematyki, a wynikami pomiarów i obserwacji, dokonywanych przy użyciu przyrządów fizycznych. Oczywiście, żaden ze znanych modeli nie dotyczy wszystkich zjawisk ani nie jest absolutnie dokładny. W ramach interpretacji fizycznej modelu należy określić zakres jego stosowalności. Ponadto, historia fizyki uczy, że „dobre" modele nie zawierają elementów bez pokrycia w rzeczywistości, tzn. takich elementów, którym nie odpowiadają — bezpośrednio lub pośrednio — żadne wielkości mierzalne. Przykładem takiego elementu był czas ~~taka~~ ~~Czas absolutny~~ absolutny występujący w teorii Newtona.

Wśród pojęć związanych z czasem i przestrzenią najbardziej elementarne jest pojęcie zdarzenia. Otrzymuje się je abstrahując od tego co i jak się dzieje, a skupiając uwagę na tym gdzie i kiedy. Ponadto, zdarzenie elementarne nie posiada rozciągłości w czasie i przestrzeni. W modelach matematycznych odpowiada mu punkt zbioru podstawowego. Zespół wszystkich zdarzeń jest ~~zdarzenia~~ czasoprzestrzenią. Warto sobie zdawać sprawę z tego, że już wprowadzając pojęcie zdarzenia robimy pewną hipotezę o naturze stosowanych modeli. Może się okazać w przyszłości, że rozpatrując stosunki czasoprzestrzenne w dziedzinie mikroświata nie można np. abstrahować od tego, czy mamy do czynienia z elektronami czy protonami. Z drugiej strony, nie należy sądzić, że pojęcie ~~zdarzenia~~ czasoprzestrzeni stosuje się tylko w teorii względności. Można go z powodzeniem używać w newtonowskiej teorii czasu i przestrzeni także.

Najprostsze doświadczenia uczą nas, że zdarzenia można określać przy pomocy czterech liczb rzeczywistych. Np. pisanie listu rozpoczynamy zwykle od określenia miejsca i daty, co jest równoważne podaniu czterech liczb, opisujących zdarzenie, jakim jest podjęty przez nas wysiłek. Liczby te mogą się zmieniać w sposób ciągły. Ponadto, jesteśmy przekonani o użyteczności rachunku różniczkowego, m. in. do określenia takich wielkości fizycznych jak prędkość i przyspieszenie. Prowadzi to do sformułowania podstawowej, wspólnej cechy większości modeli matematycznych używanych w fizyce: czasoprzestrzeń jest czterowymiarową rozmaitością różniczkową.⊛

Przyporządkowanie czwórek liczb zdarzeniom dokonujemy przy pomocy zegarów, prętów pomiarowych, teodolitów, sekstansów i innych urządzeń, które określają układ odniesienia. Używa się równocześnie wielu różnych układów odniesienia; np. na powierzchni Ziemi jest kilkanaście stref czasu. Liczby przypisywane przez układ odniesienia zdarzeniom nazywają się współrzędnymi; jedna z nich jest czasem.

(A)

Dalsze ogólne własności czasoprzestrzeni można wywnioskować z ~~na podstawie~~ obserwacji ruchów ciał, obserwacji podsumowanych w I Zasadzie Dynamiki. Zasada ta dotyczy ruchów swobodnych, a więc nie obejmuje zjawisk grawitacyjnych, zachodzących w polach elektromagnetycznych. Pole grawitacyjne, w odróżnieniu od sił elektromagnetycznych, jest uniwersalne w tym znaczeniu, że nadaje to samo przyspieszenie wszystkim ciałom umieszczonym w tym samym miejscu pola. Nie ma zatem ciał „grawitacyjnie obojętnych". ~~„ekranów" grawitacyjnych~~ Przekonamy się, że ta szczególna cecha sił grawitacyjnych odbija się w istotny sposób na geometrii czasoprzestrzeni, w obszarach gdzie takie siły występują (Rozdział ...). Od tego miejsca rozważania niniejszego rozdziału dotyczą wyłącznie sytuacji, w których można pominąć oddziaływania grawitacyjne. Założenie to jest z pewnością spełnione w skali atomowej, gdzie stosunek przyciągania elektrycznego i grawitacyjnego pary proton - elektron wynosi

$$\frac{e^2}{Gm_em_p} \cong 0{,}2 \cdot 10^{40}$$

⊛ W przestrzeni tej historia punktu materialnego jest opisywana przez krzywą zwaną linią świata tego punktu.

II.5

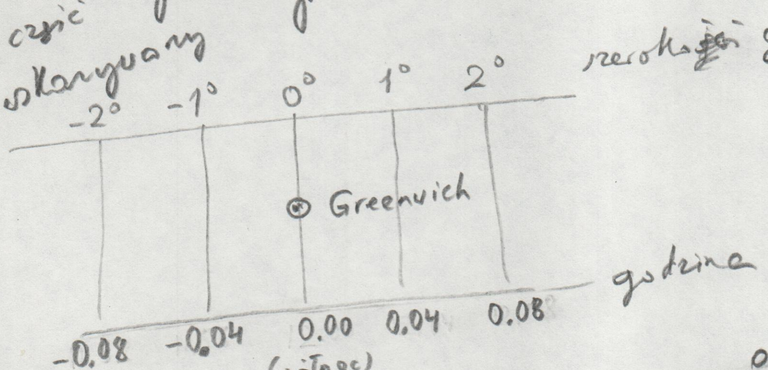
I Zasada Dynamiki mówi o istnieniu

1. wyróżnionej (obszernej) klasy ruchów, zwanych swobodnymi;
2. wyróżnionego układu odniesienia U, względem którego wszystkie ruchy swobodne są opisane przy pomocy liniowych związków między współrzędnymi.

Widać od razu, że nieosobliwe przekształcenie liniowe, dokonane nad współrzędnymi układu U, prowadzi do nowego układu odniesienia U', który także posiada własności opisaną w punkcie 2. W pewnym zakresie, przekształcenia takie stosuje się w życiu codziennym, również w odniesieniu do czasu. Aby to sobie uzmysłowić, przypomnijmy, że na Ziemi używane są różne strefy czasu. Przypuśćmy, że ~~skokowe zmiany~~ stosowane skokowe zmiany czasu pomiędzy strefami w rzeczywistości zostają zastąpione przez ciągły rozkład czasu. Poruszając się wtedy na zachód o 1° szerokości geograficznej musimy cofnąć zegarek o 4 min. Rozpatrując niewielką okolicę obserwatorium w Greenwich możemy ~~Ziem~~ zastąpić odpowiadającą jej powierzchnię Ziemi przez część płaszczyzny (rys. 1) i napisać wzór na czas t' wskazywany przez lokalne zegary

$$t' = t + 4x$$

gdzie t jest czasem GMT w minutach, a $x' = x$ - szerokością geograficzną w stopniach.



rys. 1

Ruch samolotu mijającego o północy Greenwich i zmierzającego na zachód dany jest przez związki

$$x = -Vt, \quad x' = -\frac{Vt'}{1-4V}$$

liniowe względem współrzędnych obu układów odniesienia.

Czas lokalny t' nie nadaje się do opisu ruchu samolotu z prędkością $V_0 = 15'/\mathrm{min}$ (co odpowiada ok. 1050 km/godz. na wysokości Greenwich), gdyż wtedy wszystkie zegary lokalne nad którymi przelatuje samolot pokazują tę samą godzinę.

II.6

Pierwsza Zasada Dynamiki można zinterpretować jako wskazówkę na temat budowy modeli czasoprzestrzeni. Wyróżniona rola związków i przekształceń liniowych sugeruje, że modele te powinny być przestrzeniami afinicznymi. Ruchom swobodnym odpowiadają linie proste w tych przestrzeniach. Przypomnijmy, że przestrzeń afiniczna jest to zbiór punktów M, w którym działają („przesuwają punkty") wektory należące do pewnej przestrzeni wektorowej $\vec{M}$. Dokładniej, wektor $u \in \vec{M}$ przesuwa punkt $p \in M$ do punktu $u+p \in M$,

$$u+p = i(u)(p).$$

Wektor zerowy (i tylko taki) niczego nie przesuwa,

$$i(u) = id \Leftrightarrow u=0,$$

a przesunięcie o $u+v$ jest tym samym, co złożenie przesunięć o u oraz o v,

$$i(u+v) = i(v)\circ i(u). \qquad (1)$$

Para (o,e) składająca się z punktu $o \in M$ i reperu $e=(e_i)$ przestrzeni $\vec{M}$ stanowi układ odniesienia w M, zwany układem afinicznym. Jeśli przestrzeń $\vec{M}$ jest n-wymiarowa, to reper e składa się z n liniowo niezależnych wektorów $e_1, e_2, \dots, e_n$ i dla dowolnego $p \in M$ możemy napisać

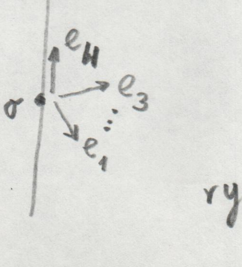
$$p = x^i(p)e_i + o \qquad (2)$$

Liczby $x^i(p)$ są współrzędnymi punktu p, a wyrażenie $x^i(p)e_i$ oznacza sumę n składników $x^1(p)e_1 + x^2(p)e_2 + \dots + x^n(p)e_n$. Uproszczenie, polegające na opuszczeniu znaku sumy we wzorze (2), oraz w podobnych sytuacjach, nosi nazwę umowy sumacyjnej Einsteina i jest stale stosowane w teorii względności. Wymiar n przestrzeni wektorowej $\vec{M}$ jest także wymiarem przestrzeni afinicznej M, rozpatrywanej jako rozmaitość różniczkowa. Oczywiście, w przypadku czasoprzestrzeni należy położyć $n=4$. ~~Tradycyjnie, wektory reperu i współrzędne numeruje się wtedy liczbami 0,1,2,3.~~

II.7.

Układy afiniczne w przestrzeni M odpowiadają w czasoprzestrzeni wyróżnionym układom odniesienia, o których mówi Pierwsza Zasada. Łatwo widać, że zmiana układu afinicznego powoduje ~~jest przyporządkowana~~ liniowe przekształcenie współrzędnych. Sama struktura przestrzeni afinicznej nie wystarcza dla celów fizyki, gdyż nie pozwala na wyjście pomiarów odstępów czasu i odległości przestrzennych. Inaczej mówiąc, zbiór wszystkich układów afinicznych jest zbyt obszerny: są w nim układy prostoliniowe o osiach skośnych. Zbiór rozpatrywanych układów możemy zawęzić, żądając aby współrzędne posiadały znaczenie fizyczne, tzn. bezpośrednio odpowiadały odcinkom czasu i odległościom mierzonym przez obserwatora związanego z danym układem. Mówiąc o obserwatorze nie mamy na myśli koniecznie człowieka. Chodzi tu raczej o zespół zegarów i innych przyrządów pomiarowych potrzebnych do wyznaczenia czasu i odległości. Posługiwanie się pojęciem obserwatora jest jednak wygodne, chociaż ze ~~względów fizycznych (tzn.) jest~~ ~~obserwator jest~~

Ograniczymy się na razie do rozpatrywania obserwatorów poruszających się swobodnie. Będziemy zakładali, że rozmiary obserwatorów, a raczej odpowiadających im przyrządów, są tak małe, iż dadzą się opisać przy pomocy linii prostych w przestrzeni M. Możemy, że obserwator jest związany z układem (σ, e), jeśli punkt σ leży na linii świata obserwatora, a jeden z wektorów reperu, powiedzmy e_4, jest do niej równoległy (rys. 2).



rys. 2

II 8

Rozpatrzmy dwa punkty $p_1, p_2 \in M$ i połóżmy

$$x^1(p_k) = x_k, \quad x^2(p_k) = y_k, \quad x^3(p_k) = z_k, \quad x^4(p_k) = t_k, \quad k = 1,2.$$

Wektor przesuwający p_1 do p_2 wynosi

(3) $$u = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2 + (z_2 - z_1)e_3 + (t_2 - t_1)e_4 .$$

Parę (o,e) nazywamy (prostokątnym) układem inercjalnym, jeśli $t_2 - t_1$ równa się odstępowi czasu między zdarzeniami p_1 i p_2, a

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

~~między zdarzeniami p_1 i p_2~~, jest ich odległością, ~~przy~~ ~~między~~ przy czym obie te liczby odpowiadają pomiarom dokonywanym przez obserwatora związanego z (o,e). Doświadczenie mówi, że ~~istnieją~~ układy inercjalne istnieją. Fizyka newtonowska i relatywistyczna różnią się od siebie określeniem klasy wszystkich układów inercjalnych. Panuje jednak zgoda co do tego, że:

I jeśli (o,e) jest układem inercjalnym, a $o' \in M$ – dowolnym punktem, to (o',e) jest także układem inercjalnym („jednorodność czasoprzestrzeni");

II jeśli (o,e) jest układem inercjalnym, a $R = (R^\alpha{}_\beta)$ macierzą ortogonalną $(\alpha, \beta = 1,2,3)$, to wektory $e'_\alpha = e_\beta R^\beta{}_\alpha$, $e'_4 = e_4$, tworzą reper inercjalny e', tzn. taki, że układ (o,e') jest inercjalny („izotropowość przestrzeni").

Fizyka newtonowska zakłada istnienie czasu absolutnego. Oznacza to, że odstęp czasu $t_2 - t_1$ między ~~zdarz~~ zdarzeniami p_1 i p_2 nie zależy od układu inercjalnego. Różnica $t_2 - t_1$ jest liniową jednorodną funkcją wektora (3). Istnieje zatem forma czasu absolutnego τ przyjmująca na wektorze u wartość $t_2 - t_1$: $\langle u, \tau \rangle = t_2 - t_1$. Wynika stąd, że dla dowolnego repera inercjalnego e mamy $\langle e_\alpha, \tau \rangle = 0$ dla $\alpha = 1,2,3$, $\langle e_4, \tau \rangle = 1$.

~~Wynika stąd, że można mówić o reperach inercjalnych~~

II 9

Możemy teraz wypowiedzieć następującą własność zbioru wszystkich układów inercjalnych fizyki newtonowskiej:

III N Jeśli e jest reperem inercjalnym, a $V = (V^\alpha) \in R^3$, to wektory

$$e'_\alpha = e_\alpha, \quad e'_4 = e_4 + V^\alpha e_\alpha$$

tworzą reper inercjalny („względność ruchu", opisanej przez przekształcenia pełnej niejednorodnej grupy Galileusza).

Stosując I, II i III N, do jednego układu inercjalnego, można z niego otrzymać wszystkie układy inercjalne fizyki newtonowskiej: ~~inercjalne~~

II 10

2. Zasada względności

III. Podstawy szczególnej teorii względności

o tym że w teorii
przedrel. dwie struktury
geom.

h τ — g

mechanika — pole elektromagn.
ruch ładunk. — optyka

---

wszystkie pomiary sprowadzamy
do pomiarów czasu – zgodnie
z obecną tendencją, ani nie sztab sztywnych
pojęcie zegarów i idealnych } oraz też metra
pomiary radarowe

1. Geometria czasoprzestrzeni Newtona

W mechanice Newtona czyni się, częstokroć milcząco, szereg założeń, określających strukturę czasoprzestrzeni. Zajmiemy się obecnie wyliczeniem tych założeń i omówimy wynikającą z nich strukturę geometryczną czasoprzestrzeni w mechanice Newtona. Rozważania poniższe będą więc rozwinięciem tego, co zostało naszkicowane w Rozdziale I.

Podstawowym pojęciem w mechanice jest pojęcie zdarzenia. Jak już mówiliśmy, jest to coś, o czym można powiedzieć jedynie gdzie i kiedy zaszło. Zdarzenia będziemy uważali za punkty (elementy) podstawowego zbioru E, który ~~nazwiemy~~ nazywamy czasoprzestrzenią. Doświadczenie mówi, że czasoprzestrzeń, przynajmniej w przybliżeniu, jest jednorodna. W teorii Newtona przyjmuje się, że odpowiednim modelem czasoprzestrzeni jest przestrzeń afiniczna. Dla uproszczenia wypowiedzi będziemy mówili, że czasoprzestrzeń Newtona jest przestrzenią afiniczną, choć takie sformułowanie jest niezbyt ścisłe. Pierwsze podstawowe założenie teorii Newtona można wysłowić następująco:

I. Czasoprzestrzeń E jest czterowymiarową przestrzenią afiniczną. Ruchom swobodnych punktów materialnych odpowiadają proste.

Ostatnie zdanie stanowi wyraz pierwszego prawa dynamiki. Można je uważać za określenie ruchów swobodnych. Zwrot „ruchowi odpowiada prosta" należy rozumieć tak, że zbiór zdarzeń, z których składa się ruch, jest prostą w przestrzeni afinicznej E. Zamiast mówić, że ruchowi punktu materialnego odpowiada prosta, będziemy często mówili, że owa prosta jest linią świata punktu.

Istotną cechą teorii Newtona jest to, że zakłada ona istnienie czasu absolutnego odmierzanego przez odpowiednie „zegary idealne". Łatwo widać, że w języku teorii przestrzeni wektorowych, założymy to jest równoważne przyjęciu istnienia wyróżnionej formy $0 \neq \tau \in \mathbb{V}^*$ ($\mathbb{V}$ oznacza przestrzeń przesunięć przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}$). Jeśli p i q są zdarzeniami, to liczbę

$$\langle \tau, q-p \rangle$$

będziemy nazywać odstępem czasu (absolutnego) między tymi zdarzeniami

lub trwaniem wektora $q-p$.

Zdarzenia są równoczesne jeśli $\langle \tau, q-p \rangle = 0$; wektory $v \in \mathbb{V}$ takie, że $\langle \tau, v \rangle = 0$ nazywają się przestrzennymi; wektory, które nie są przestrzenne, nazywają się czasowymi. Prosta o czasowym wektorze kierunkowym nazywa się prostą czasową. Niech $S \subset \mathbb{V}$ oznacza zbiór wektorów przestrzennych; podprzestrzenie afiniczne postaci $S + o$ ($o \in \mathbb{V}$) nazywają się przestrzeniami. Przestrzenie są więc klasami równoważności, na które relacja równoczesności dzieli czasoprzestrzeń. Często jedną z przestrzeni obiera się za początek liczenia absolutnego czasu. Dokładniej, niech P będzie pewną wyróżnioną przestrzenią i $o \in P$, funkcja $t : E \to \mathbb{R}$ określona przez

(1) $$t(p) = \langle \tau, p - o \rangle, \quad p \in E$$

nazywa się czasem absolutnym liczonym od P. Reasumując:

II. Istnieje forma czasu absolutnego $\tau \in \mathbb{V}^*$, określająca odstępy czasu między zdarzeniami.

Na podstawie (1) oraz (II §4) widzimy, że czas absolutny jest parametrem afinicznym wzdłuż prostych czasowych. Można teraz nieco wzmocnić postulat I i powiedzieć, że ruchom swobodnych punktów materialnych odpowiadają proste czasowe.

Wreszcie, przestrzenie w teorii Newtona mają strukturę właściwych przestrzeni euklidesowych. Aby to uwzględnić, przyjmujemy, że podprzestrzeń $S \subset \mathbb{V}$ składająca się z wektorów przestrzennych jest zaopatrzona we właściwy (dodatnio określony) iloczyn skalarny.

▲ Formę τ można rozpatrywać (~~traktować~~) również jako (stałe) pole określone na E i dane przez

$$\tau = dt$$

tak, że $d\tau = 0$.

~~Jeśli $q: R \to E$ jest~~

Dowolnemu ruchowi punktu materialnego odpowiada w E linia świata, tzn. krzywa $q: R \to E$ ~~Odpowiednio~~ o czasowych wektorach stycznych. Zatem sparametryzować linię świata można ~~Parametryzację~~ ~~przy pomocy czasu absolutnego, t.~~ Niech w ~~będzie polem wektorów stycznych do~~ linii świata q sparametryzowanej przy pomocy czasu absolutnego, to

$$\langle w, \tau \rangle = \langle w, dt \rangle = \frac{d}{d\lambda} t \circ q(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = 1$$

a zatem tak, $t \circ q = id$

Odstęp czasu absolutnego między zdarzeniami $P_1 = q(t_1)$ i $P_2 = q(t_2)$, który można określić przy pomocy całki

$$\int_Q \tau = t_2 - t_1$$

na linii świata $Q = q([t_1, t_2])$, nie zależy od kształtu

Jak wiadomo (II, § ~~4~~ 3), iloczynowi takiemu odpowiada pewien symetryczny element przestrzeni $S \otimes S$ („kontrawariantny tensor metryczny"), a zatem pewien element h przestrzeni $V^* \otimes V^*$. Tensor h określa odwzorowanie liniowe $V^* \to V$, które też będziemy oznaczali symbolem h. Na mocy definicji podprzestrzeni S mamy $h(\tau) = 0$; dokładniej $\operatorname{Im} h = S$, $\operatorname{Ker} h = \mathbb{R}\tau$. ~~Przestrzeń V^* z~~ Iloczyn ~~skalarnym~~ h rozpatrywany jako iloczyn skalarny w przestrzeni V^* ~~określonym przez $h \in V \otimes V$~~ jest więc ~~metrycznie izomorficzna~~ osobliwy; ~~przestrzeni $\mathbb{R}^4$ z iloczynem $g_{4;3,0}$~~. Można wybrać bazę (e^i) w V^* tak, aby

(2) $$h^{\alpha\beta} = h(e^\alpha, e^\beta) = \delta^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1,2,3)$$

oraz

(3) $$e^4 = \tau, \quad \text{tzn.} \quad h^{4i} = h(\tau, e^i) = 0 \qquad (i = 1,2,3,4).$$

Mamy więc

III. Przestrzeń wektorowa V^*, dualna względem przestrzeni przesunięć, posiada (zwyrodniały) iloczyn skalarny h ~~o sygnaturze (3,0)~~ taki, że

$$h(\omega, \pi) \geq 0 \quad \text{dla każd. } \omega, \pi \in V^*.$$

$$h(\omega, \pi) = 0 \quad \text{dla każd. } \pi \in V^* \iff \omega \wedge \tau = 0.$$

~~Postulat III w istocie implikuje II i można by ten ostatni opuścić.~~

Zwyrodniały iloczyn skalarny h wyznacza formę τ z dokładnością do skali; zmieniając nieco wysłowienie postulatu III można by zrezygnować z II.

Niech f oznacza automorfizm ~~przekształcenie~~ afiniczny przestrzeni E, a φ — związany z nim automorfizm przestrzeni wektorowej V,

$$f(v + p) = \varphi(v) + f(p)$$

Przekształcenie f nazywa się *przekształceniem Galileusza*, jeśli φ^* zachowuje formę czasu absolutnego oraz iloczyn skalarny,

(4) $$\varphi^*(\tau) = \tau$$

(5) $$h(\varphi^*(\omega), \varphi^*(\pi)) = h(\omega, \pi), \qquad \omega, \pi \in V^*.$$

Zbiór wszystkich przekształceń Galileusza tworzy grupę, zwaną *grupą Galileusza*. *Bazą inercjalną* nazywa się bazę afiniczną (o, e)

o tej własności, że baza (e^i), dualna względem $e = (e_i)$, spełnia warunki (2) i (3). Współrzędne względem bazy inercjalnej nazywają się <u>współrzędnymi inercjalnymi</u>. W dalszym ciągu ograniczymy się do rozpatrywania baz inercjalnych. Przekształcenie Galileusza przeprowadza bazy inercjalne w bazy inercjalne. Odwrotnie, dla każdej pary baz inercjalnych istnieje jedno przekształcenie Galileusza, przeprowadzające pierwszą bazę w drugą.

Zbiór wszystkich baz inercjalnych o wspólnym wektorze e_4 nazywa się <u>układem inercjalnym</u>. Układ inercjalny można więc w pełni scharakteryzować przy pomocy wektora czasowego $u = e_4$, unormowanego tak, aby $\langle \tau, u \rangle = 1$. W związku z tym, będziemy używali zwrotu „układ inercjalny u" zamiast „układ inercjalny, scharakteryzowany przez unormowany wektor czasowy u".

Niech (o, e) będzie bazą inercjalną i $u = e_4$; wektory e_1, e_2, e_3 są przestrzenne, jednostkowe i wzajemnie prostopadłe. Na podstawie (1) widać, że czwarta współrzędna punktu p względem (o, e) jest równa wartości czasu absolutnego w tym punkcie, liczonego od $\mathbb{S} + o$. Możemy więc napisać

$$p = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t u + o$$

albo, symbolicznie,

$$p = \vec{r} \cdot \vec{e} + t u + o$$

gdzie

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{e} = (e_1, e_2, e_3).$$

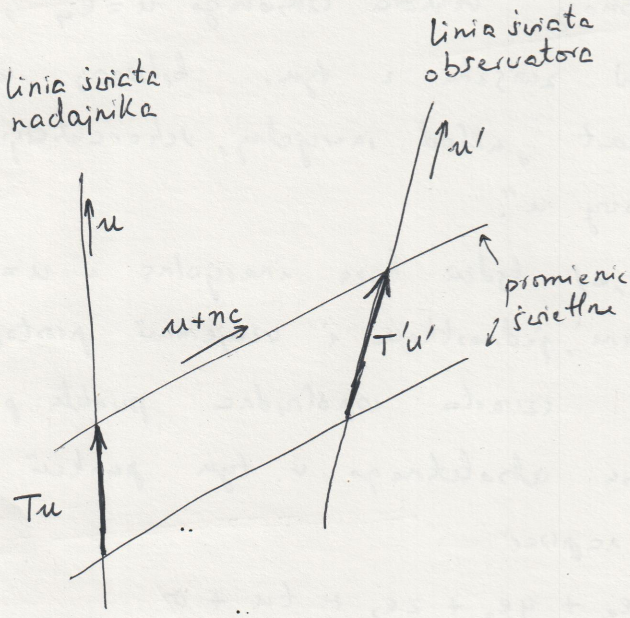
Podobnie, jeśli $v \in \mathbb{S}$, to zamiast

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3$$

piszemy

$$v = \vec{v} \cdot \vec{e}.$$

Przekształcenie Galileusza zachowujące wektory przestrzenne, tzn. takie, że $v \in \mathbb{S} \Rightarrow \varphi(v) = v$, nazywa się <u>szczególnym</u>



M

Rys. . .

Mamy $T'u' - Tu = \lambda(u + nc)$.
Obliczając trwanie tych wektorów
otrzymujemy $\lambda = T' - T$. ~~czyli (9)~~.
~~czyli~~ Stąd, po uwzględnieniu
$u' = u - v_0 = u - Vn$, czyli (9).

3.6.

przekształceniem Galileusza. Znajdziemy ogólną postać takiego przekształcenia. Jeśli (O, e) jest bazą inercjalną i $u = e_4$, to $\langle \tau, u \rangle = 1$ więc $\langle \tau, \varphi(u) \rangle = 1$; wektor $v = \varphi(u) - u$ jest przestrzenny. Niech

$$f(O) = \vec{r}_0 \vec{e} + t_0 u + O$$

to

$$f(p) = f(\vec{r}\vec{e} + tu + O) = \varphi(\vec{r}\vec{e} + tu) + f(O)$$
$$= (\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0)\vec{e} + (t + t_0)u + O$$

Szczególnemu przekształceniu Galileusza $f: \underline{M} \to \underline{M}$ odpowiada zatem przekształcenie

(6)
$$\vec{r} \longmapsto \vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0$$
$$t \longmapsto t + t_0$$

współrzędnych inercjalnych.

Łatwo teraz podać określenie wektora prędkości ruchu swobodnego względem układu inercjalnego u. Niech $W \subset \underline{V}$ oznacza kierunek, odpowiadający ruchowi swobodnemu. W zawiera więc wektory czasowe; wśród nich istnieje dokładnie jeden wektor $w \in W$ unormowany względem τ, tzn. taki, że $\langle \tau, w \rangle = 1$. Wektor przestrzenny

$$v = w - u$$

nazywa się <u>prędkością</u> ruchu względem układu inercjalnego u.

Każdemu układowi inercjalnemu u można przyporządkować rodzinę ruchów swobodnych, mianowicie ruchy o wektorze kierunkowym u. Niech u' będzie innym układem inercjalnym, a w – unormowanym (względem τ) wektorem kierunkowym, odpowiadającym pewnemu ruchowi swobodnemu. Równość

(7)
$$v' = v + v_0$$

gdzie

$$v' = w - u' , \quad v = w - u , \quad v_0 = u - u'$$

wyraża prawo składania prędkości w mechanice Newtona; v_0 nazywa się prędkością układu inercjalnego u względem układu u'.

Kierunek wektora prędkości v nazywa się *kierunkiem* (przestrzennym) *ruchu* w odniesieniu do układu inercjalnego u. Podobnie jak prędkość, kierunek ruchu jest *względny*, tzn. zależy od wyboru układu inercjalnego. Wygodnie jest charakteryzować kierunek ruchu przy pomocy wektora jednostkowego

$$n = v/|v|$$

gdzie $|v|$ oznacza długość wektora przestrzennego v. Dla unormowanego wektora $w \in W$ możemy więc napisać

$$w = u + n|v|.$$

2. Eter i optyka nierelatywistyczna.

Nieco upraszczając rzeczy, można powiedzieć, że przed 1905 r. sądzono, iż równania Maxwella obowiązują w pewnym wyróżnionym układzie inercjalnym, który nazywano *eterem*. Jak wiadomo, z równań Maxwella wynika, że względem układu, w którym te równania zachodzą, wielkość prędkości światła w próżni wynosi $|v| = c$. Zgodnie z teorią Newtona, prędkość względem innych układów inercjalnych powinna być określona przez prawo składania prędkości (7).

Niech u oznacza unormowany wektor czasowy, charakteryzujący eter. Promieniom świetlnym odpowiadają w czasoprzestrzeni proste o wektorach kierunkowych postaci $u + nc$, gdzie n jest dowolnym jednostkowym wektorem przestrzennym, określającym w odniesieniu do eteru kierunek rozchodzenia się światła w przestrzeni. Względem układu inercjalnego u', poruszającego się w

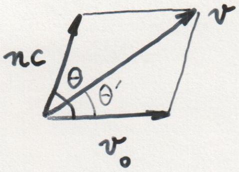
3.8.

zgodnie z (7)

stosunku do eteru z szybkością $-v_0 = u' - u$, prędkość światła wynosi

$$v' = v_0 + nc$$

Ze wzoru tego łatwo otrzymać klasyczną formułę opisującą aberrację światła: jeśli θ oraz θ' oznaczają, odpowiednio, kąty między kierunkami wektorów n i v_0 oraz v' i v_0, to



(8) $$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{V}{c}}$$

F

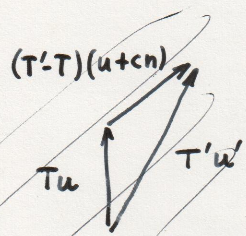
gdzie

$$V = |v_0|$$

Podobnie oblicza się wielkość efektu Dopplera; niech, dla uproszczenia,

$$v_0 = V n$$

Oznaczając przez T i T' okresy fali świetlnej, mierzone względem eteru i układu u', odpowiednio, otrzymujemy (por. rys. — na odwrocie str. 3.5.)



(9) $$\frac{T - T'}{T'} = \frac{V}{c}.$$

E

Wprowadźmy teraz symetryczny tensor kontrawariantny

~~ważnej~~ ~~$\frac{1}{c^2}u\otimes u - h$~~ 2

(10) $$\bar{g} = \frac{1}{c^2} u \otimes u - h$$

Odpowiadające mu odwzorowanie liniowe $V^* \to V$ jest izomorfizmem przeprowadzającym formę czasu absolutnego w eter u ~~dokładnie $g(\tau) = u$~~.
Izomorfizm $\tilde{g}: V \to V^*$, który jest równocześnie odwrotny i kontragredientny względem tego ostatniego, definiuje tensor metryczny $\underline{g} \in V^* \otimes V^*$ o sygnaturze (1,3).
Łatwo widać, że na to, aby wektor $k \neq 0$ był wektorem kierunkowym promienia świetlnego, potrzeba i wystarcza, aby k było wektorem zerowym względem iloczynu skalarnego $\underline{g}$:

$$\underline{g}(k,k) = 0.$$

3.9. ~~Na podst~~

~~Baza inercjalna (θ, e), której wektor czasowy e_4 pokrywa się z u, spełnia następujące warunki unormowania względem g:~~

$$\cancel{g(e_\alpha, e_\beta) = -\frac{1}{c^2}\delta_{\alpha\beta}}$$

$$\cancel{g(e_\alpha, e_4) = 0}$$

$$\cancel{g(e_4, e_4) = 1.}$$

Jak się zaraz ~~pokażemy~~ przekonamy, iloczyn skalarny g jest potrzebny do napisania równań Maxwella. W elektrodynamice przedrelatywistycznej odgrywał on jednak rolę pomocniczą i nie przypisywano mu znaczenia fizycznego. Warto zwrócić uwagę na to, że g wystarcza do pełnego scharakteryzowania zjawiska propagacji światła w próżni; do tego celu, oddzielna znajomość metryki przestrzennej h ani eteru u nie jest potrzebna.

Działanie izomorfizmu $\tilde{g}$ na wektory e_i bazy inercjalnej łatwo obliczyć ~~z~~ przy pomocy ~~z~~ wzorów (2) i (3) z samej definicji $\bar{g}$:

$$\tilde{g}(e_\alpha) = -e^\alpha, \qquad \tilde{g}(u) = c^2\tau$$

Wyznacznik $g(e)$ składowych tensora metrycznego g ~~wg~~ względem bazy inercjalnej wynosi zatem $-c^2$. ~~Na tej podstawie~~ Informacja ta ~~jest~~ jest potrzebna do obliczania form dualnych.

Aby napisać w języku geometrii równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego w próżni

(11) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

(12) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, $\quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

wprowadzimy 2-formę

$$F = E_\alpha e^\alpha \wedge \tau + \frac{1}{2c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma$$

zbudowaną z składowych wektorów pola elektrycznego $\vec{E}\vec{e} = E^\alpha e_\alpha = h(E_\alpha e^\alpha)$ i magnetycznego $\vec{B}\vec{e} = B^\alpha e_\alpha = h(B_\alpha e^\alpha)$

3.10 Forma dualna względem F wynosi

$$\check{F} = -\frac{1}{2c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma + B_\alpha e^\alpha \wedge \tau$$

a równania Maxwella (11) i (12) są równoważne, odpowiednio,

(13) $$dF = 0$$

oraz

(14) $$d\check{F} = 0$$

Na mocy lematu Poincaré'go [ ] z (13) wynika istnienie ~~...~~ potencjału pola elektromagnetycznego, tzn. formy A takiej, że

(15) $$F = dA$$

Równania (12) czyli (14) obowiązują ~~jeśli chce się je~~ w obszarze bez ładunków i prądów. ~~Gdy~~ ~~Aby~~ napisać odpowiednie równanie w ogólnym przypadku, ~~...~~ należy wprowadzić czterowymiarową formę ~~...~~ prądu ~~...~~ odpowiadającą ~~...~~ jej pseudo-3-formę dualną $\check{j}$. Zamiast (14) mamy wówczas

$j = \rho\tau + \frac{1}{c} j_\alpha e^\alpha$

(16) $$d\check{F} = ~~[illegible]~~ - 4\pi\check{j}$$

Wynikające stąd równanie

(17) $$d\check{j} = 0$$

jest różniczkową postacią prawa zachowania ładunku. Do napisania równań Maxwella potrzebny ~~...~~ jest tensor g, a w szczególności obliczenia wielkości dualnych, (w ramach elektrodynamiki przed-relatywistycznej)

Natomiast równania ruchu cząstki naładowanej w polu elektromagnetycznym zapisuje się przy pomocy tensora czasu absolutnego i ~~Mają~~ równanie przestrzennego metrycznego h. to są postaci

(18) $$m\frac{Dw}{dt} = -q\, h(w \lrcorner F)$$

gdzie w ~~...~~ jest wektorem stycznym do linii świata ~~...~~ cząstki o masie m i ładunku q, unormowanym tak, że $\langle w, \tau\rangle = 1$. Wektor przestrzenny $v = w - u$ jest więc prędkością tej cząstki względem obserwatora u. Symbol h ~~...~~ w równaniu (18) oznacza odwzorowanie liniowe $V^* \to V$ związane z przestrzennym iloczynem skalarnym.

3.19

4. Postulaty Einsteina. ~~i analiza pomiarów~~.

Obecnie przedstawimy zespół najważniejszych założeń, które określają strukturę czasoprzestrzeni w szczególnej teorii względności i ustalają interpretację fizyczną tej teorii. Założenia te będziemy nazywali umownie postulatami Einsteina, co nie będzie w pełni zgodne z tradycją, według której ~~określające~~ ~~tym~~ mianem tym określa się tylko niektóre spośród tych założeń.

Postulat podstawowy przenosi się bez zmian z teorii Newtona:

Ia Czasoprzestrzeń M jest czterowymiarową przestrzenią afiniczną. Ib Ruchom swobodnych punktów materialnych odpowiadają proste.

Natomiast postulaty metryczne, II i III z §1 zostają zastąpione przez

II Czasoprzestrzeń M jest przestrzenią Minkowskiego, tzn. w przestrzeni przesunięć E dany jest iloczyn skalarny g o sygnaturze (1,3).

~~(A) Wektor $u \in E$ taki, że u^2 ~~g(u,u)~~ > 0 ... Liczbę ... nazywamy ... nazywamy czasowym. Jeśli u^2 ~~g(u,u)~~ < 0 to mówimy, że u jest wektorem przestrzennym. Jak wiadomo, wektory o znikającym kwadracie~~

(A) [Tam, gdzie to nie może prowadzić do nieporozumień, będziemy pisali $u \cdot v$, względnie uv, zamiast $g(u,v)$, oraz u^2 zamiast $g(u,u)$.

(B) ~~a liczbę~~

$$|u| = \sqrt{-u^2}$$

nazywamy długością wektora u. Długość wektora $q-p$ łączącego parę zdarzeń rozdzielonych przestrzennie nazywa się odległością tych zdarzeń.

Jeżeli wektor $q-p$ jest czasowy, to o ~~parze~~ zdarzeniach $p, q \in M$ mówi się, że są rozdzielone czasowo, a liczbę $\sqrt{(q-p)^2}$ nazywa się interwałem między tymi zdarzeniami.

3.19 bis

~~Wektor $u \in E$ taki, że~~

Tam, gdzie to nie może prowadzić do nieporozumień, będziemy pisali $u \cdot v$, względnie uv, zamiast $g(u,v)$ oraz u^2 zamiast $g(u,u)$.

Wektor $u \in E$ taki, że $u^2 > 0$ nazywamy czasowym. Liczbę $\sqrt{u^2}$ nazywamy trwaniem wektora u. Jeśli $u^2 < 0$ to mówimy, że wektor u jest wektorem przestrzennym, a liczbę $|u| = \sqrt{-u^2}$ nazywamy długością wektora u. Jak wiadomo, wektory o zanikającym kwadracie

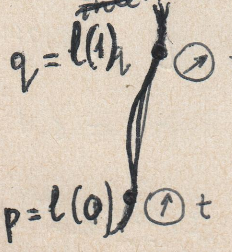
Skalarnym nazywają się zerowymi.
~~Proste~~ Krzywe, których wektory ~~kierunkowe~~ styczne są czasowe, zerowe, względnie przestrzenne nazywają się, odpowiednio ~~prostymi~~ krzywymi czasowymi, zerowymi, względnie przestrzennymi.

(A) Podobnie jak w teorii Newtona, wzmacniamy nieco postulat Ib twierdząc, że
Ib' linie świata ~~ruchów~~ swobodnych punktów materialnych są ~~odpowiadają~~ prostymi czasowymi.

(B) Aby powiązać wielkości geometryczne występujące w przestrzeni Minkowskiego z fizycznymi pomiarami czasu i odległości, wprowadzimy pojęcie zegarów idealnych.
Będziemy zakładali, że wymiary tych zegarów są pomijalne, tzn. będziemy je traktowali jako punkty materialne.

Postulujemy

IV Istnieją zegary idealne, których ~~czasie~~ ~~ruch~~ różnice wskazań ~~,~~ są proporcjonalne do ~~swobodnego, interwału między odczytami (rys.~~ długości łuku ich linii świata (rys)



$t + \frac{1}{c}\int_l \sigma$

W związku z tym, długość łuku mierzoną w jednostkach czasu,

$$\frac{1}{c}\int_l \sigma$$

3.21 nazywa się czasem własnym. Zegary idealne [illegible] czas własny. (A) Odpowiednio wyskalowane

$\overline{V}$. Wszystkie idealne pomiary odległości i odcinków czasu dają się sprowadzić do pomiarów wykonywanych przy pomocy zegarów idealnych oraz promieni świetlnych, albo są takim pomiarom równoważne.

W ~~ciąg~~ dalszym ciągu ograniczymy rozważania do zegarów idealnych wyskalowanych tak, aby różnica wskazań odpowiadających zdarzeniom p i q, była równa ~~[illegible]~~ trwaniu wektora czasu, $q-p$. ~~wynosiła $\tau(q-p)$~~ ~~$\frac{1}{c}s(q-p)$~~ gdzie c jest prędkością światła. Mówimy, że ~~[illegible]~~ w ten sposób wyskalowany zegar idealny wskazuje czas własny.

~~Liniа~~ Wybierając dowolny punkt o na prostej N, która odpowiada ruchowi ~~[illegible]~~ historii zegara reprezentującej w przestrzeni Minkowskiego, możemy określić funkcję czasu własnego, liczonego od o:

$$N \ni p \mapsto t = \tau(p-o) \in R$$

Jeśli u jest ~~jednostkowym~~ jednostkowym (czasowym) wektorem kierunkowym prostej N, to ~~[illegible]~~

$$p = tu + o.$$

~~[illegible]~~

(A) Należy zwrócić uwagę na to, że w przeciwieństwie do teorii Newtona, nie można teraz mówić o odstępie czasu własnego między zdarzeniami. Aby określić czas własny należy podać linię świata, tzn. ruch, którego udziałem są dwa zdarzenia. Forma σ nie jest różniczką zupełną, tak że nawet jeśli dla dwóch linii świata

$$l_1(0) = l_2(0) \quad \text{i} \quad l_1(1) = l_2(1)$$

to na ogół

$$\int_{l_1} \sigma \neq \int_{l_2} \sigma$$

Zależność czasu własnego od kształtu linii świata została spopularyzowana pod nazwą „paradoksu bliźniąt". O tym dokładniej ~~…~~ B, tzn. o … mowa w §

Założenie istnienia zegarów idealnych jest na tyle mocne, że pozwala sprowadzić ~~wszystkie~~ czasu, pomiary kinematyczne: odległości, prędkości itp. do obserwacji tych zegarów, wykonywanych przy pomocy promieni świetlnych i to w postaci odbieranego sygnału zegarów. Sformułujmy postulaty:

3.22

5. Geometria przestrzeni Minkowskiego.

W związku z tym, że podstawowy postulat Einsteina utożsamia czasoprzestrzeń fizyczną z przestrzenią Minkowskiego, omówimy obecnie dokładniej geometryczne własności tej przestrzeni oraz związanej z nią przestrzeni przesunięć.

Niech M będzie przestrzenią Minkowskiego, E – jej przestrzenią przesunięć, a g – iloczynem skalarnym, który, na mocy definicji przestrzeni Minkowskiego, posiada sygnaturę $(1,3)$. Bazę afiniczną $(0, e_i)$ taką, że

$$g(e_0, e_0) = c^2$$

$$g(e_0, e_\alpha) = 0$$

$$g(e_\alpha, e_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}$$

(por. § 2)* nazywamy bazą inercjalną. Współrzędne względem bazy inercjalnej nazywają się współrzędnymi inercjalnymi.

* ~~Z~~ Często ~~[illegible]~~ wybiera się „naturalny" układ jednostek, w którym prędkość światła $c = 1$. ~~Zrobimy to w niniejszym~~ ~~paragrafie~~ W związku z tym Jeśli to uczynić, baza (e_i) będzie po prostu bazą ortonormalną w sensie II, § 11. Wskaźniki łacińskie, np. i, przebiegają odtąd od 0 do 3, greckie, np. α, od 1 do 3.

Będziemy to robili stale [illegible] u dołu [illegible] ciąg [illegible] tylko [illegible] prędkości światła [illegible] do tradycyjnej [illegible]

(A) Będziemy pisali

$$p = tu + \vec{r}\vec{e} + \theta$$

gdzie $u = e_0, \quad \vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$, itd.

zamiast

$$p = x^i e_i + \theta.$$

W następnym paragrafie pokażemy, że współrzędne inercjalne posiadają znaczenie fizyczne w tym sensie, że można je mierzyć przy pomocy zegarów i promieni świetlnych.

3.23. Podobnie jak w teorii Newtona, zbiór wszystkich baz inercjalnych o wspólnym wektorze czasowym $u = e_0$ nazywa się <u>układem inercjalnym</u> u.

Automorfizmy metryczne przestrzeni wektorowej E nazywają się <u>przekształceniami Lorentza</u>; zbiór wszystkich tych przekształceń tworzy grupę $\mathbb{L}(E)$, zwaną <u>grupą Lorentza</u> przestrzeni E (por. II, §11).

Przekształcenie afiniczne o tej własności, że związany z nim automorfizm przestrzeni wektorowej jest przekształceniem Lorentza, ~~$g(\varphi(x), \varphi(y)) = g(x,y)$, $(x,y \in E)$,~~ nazywa się <u>przekształceniem Poincarégo</u>.

Zbiór wszystkich przekształceń Poincarégo przestrzeni M tworzy grupę ~~$\mathbb{P}(M)$~~, którą nazywa się <u>grupą Poincarégo</u>. Przekształcenia Poincarégo przeprowadzają bazy inercjalne w bazy inercjalne. Dla dowolnej pary baz inercjalnych istnieje ~~dokładnie~~ jedno przekształcenie Poincarégo, przeprowadzające pierwszą bazę w drugą.

3.24 Stwierdzenie 1.
~~Lemat 1~~. Jeśli $u, v \in E$ są wektorami czasowymi, to

$$(u\cdot v)^2 \geq u^2 v^2$$

a równość zachodzi, gdy wektory u i v są równoległe.
Istotnie, wystarczy udowodnić powyższą nierówność dla przypadku, gdy $u^2 = 1$.
Niech (e_i) będzie bazą inercjalną, taką, że $e_0 = u$.
Kładąc $v = \gamma u + \vec{v}\vec{e}$ otrzymujemy

$$\cancel{|u\cdot v| = |\gamma| \geq \sqrt{\gamma^2 - \vec{v}^2/c^2} = \tau(v)}$$

$$(u\cdot v)^2 = \gamma^2 \geq \sqrt{\gamma^2 - \vec{v}^2} = u^2 v^2$$

Niech $\mathcal{U}$ oznacza zbiór układów inercjalnych; można go utożsamić ze zbiorem jednostkowych wektorów czasowych.

Podobnie można udowodnić

Stw. ~~Lemat~~ 2. Jeśli u jest wektorem czasowym, $0 \neq v \in E$ i $uv = 0$, to v jest wektorem przestrzennym.

Stw. ~~Lemat~~ 3. Jeśli $u \neq 0$ jest wektorem zerowym i $uv = 0$, to v jest albo wektorem przestrzennym albo te wektory są równoległe. ~~$v = au$, $a \in R$.~~

Jeśli $u, v \in \mathcal{U}$ to, na mocy lematu 1, $uv \geq 1$ albo $uv \leq -1$

Ponadto, jeśli $u, v, w \in \mathcal{U}$ to

3.25

$$uv \geq 1 \quad \text{i} \quad vw \geq 1 \quad \Rightarrow \quad uw \geq 1$$

Istotnie, ~~mamy~~ dla dowolnych wektorów mamy

$$((vw)u - (uv)w)\cdot v = 0$$

Jeśli v jest wektorem czasowym, to wektor $(vw)u - (uv)w$ jest równy 0 albo jest wektorem przestrzennym (~~lemat~~ jtw. 2).

W pierwszym wypadku mamy

$$uw = 1$$

a w drugim

$$(vw)^2 + (uv)^2 - 2(uv)(vw)(uw) < 0$$

czyli ~~...~~ $uw > 1$.

Wynika stąd, że relacja T określona w U przez

$$uTv \Leftrightarrow uv \geq 1$$

jest relacją równoważności. Iloraz U/T zawiera dwa elementy, $U/T = \{U^+, U^-\}$. Jeśli jeden z nich, powiedzmy U^+ jest wyróżniony, to przestrzeń Minkowskiego nazywa się zorientowaną „w czasie". O wektorach należących do U^+ (względnie U^-) mówi się wtedy, że są skierowane ku przyszłości (względnie ku przeszłości).

3.26 Dowolny wektor $u \in U$ (układ inercjalny) może być użyty do określenia orientacji w czasie. W dalszym ciągu będziemy zawsze zakładali, że przestrzeń Minkowskiego jest zorientowana w czasie, a rozpatrywane jednostkowe wektory czasowe są skierowane ku przyszłości.

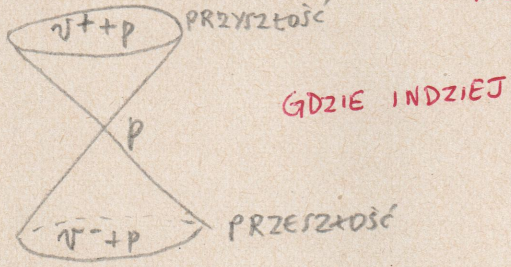
Niech $v \neq 0$ będzie dowolnym wektorem nieprzestrzennym, tzn. takim, że $v^2 \geq 0$. Znak iloczynu uv nie zależy od $u \in U^+$, co łatwo sprawdzić przy pomocy poprzednich lematów. Jeśli $uv > 0$ (względnie $uv < 0$) dla $u \in U^+$, to mówimy, że wektor v jest skierowany ku przyszłości (względnie ku przeszłości). Zbiór V różnych od zera wektorów nieprzestrzennych można przedstawić w postaci

$$V = V^+ \cup V^-$$

gdzie $V^+ \supset U^+$ jest częścią V, składającą się ze wszystkich wektorów skierowanych ku przyszłości. Zbiór N wektorów zerowych, zwany stożkiem zerowym, jest postaci

$$N = \{0\} \cup N^+ \cup N^-$$

3.27 gdzie $N^\pm = N \cap V^\pm$. Jeśli $p \in M$, to zbiór $V^+ + p$ nazywa się <u>przyszłością</u> p, a zbiór $V^- + p$ — jego <u>przeszłością</u>. Zbiór $N + p$ nazywa się <u>stożkiem świetlnym</u> zdarzenia p. ~~Jeśli q~~ z O zdarzeniu $q \neq p$ nie należącym do ~~β~~ $V + p$ mówimy, że zachodzi <u>gdzie indziej</u> niż p



(dlaczego?).

Niech L będzie przekształceniem Lorentza, $L \in \mathbb{L}(E)$, a $u \in U$. Znak iloczynu $u \cdot Lu$ nie zależy od u; jeśli ~~jest~~ jest on dodatni, mówimy, że L zachowuje orientację czasu. Zbiór wszystkich przekształceń Lorentza zachowujących orientację czasu tworzy podgrupę $\mathbb{L}_\uparrow(E)$ grupy Lorentza. Podgrupa

$$\mathbb{L}^+_\uparrow(E) = \mathbb{L}_\uparrow(E) \cap G\mathbb{L}^+(E)$$

nazywa się <u>właściwą grupą Lorentza</u>. Jej elementy, właściwe przekształcenia Lorentza, zachowują orientację baz i orientację czasu.

3.22. 6. Kinematyka relatywistyczna.

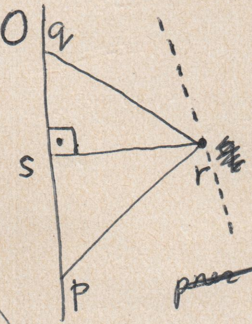
Wprowadzimy teraz pojęcie obserwatora inercjalnego. Będziemy tutaj przez to rozumieli układ fizyczny o pomijalnych rozmiarach (punkt materialny), poruszający się swobodnie, zaopatrzony w zegar idealny oraz w urządzenia do wysyłania i odbierania sygnałów świetlnych (promieni).

a także określanie kierunku fal przestrzennej promieni ?

Przeanalizujemy, w jaki sposób obserwatorzy inercjalni mogą przeprowadzać pomiary odcinków czasu, odległości i prędkości oraz synchronizować zegary.

Pomiary odległości.

Najprostszy do pomyślenia pomiar odległości ~~polega na~~ jest używany w radiolokacji ~~(radarze)~~. ~~Polega on na~~ Opiera się on na pomiarze czasu, który upływa pomiędzy wysłaniem sygnału świetlnego ~~przez obserwatora~~, a jego odbiorem, po odbiciu od ~~d~~ obiektu, którego odległość chce się wyznaczyć (rys.).



Linię świata obserwatora inercjalnego, dokonującego pomiaru, oznaczymy przez O.

Niech p i q oznaczają, odpowiednio, zdarzenia ~~obserwacji~~ polegające na ~~emisji~~ wysłaniu ~~[illegible]~~ i odbiorze sygnału ~~[illegible]~~ przez obserwatora

świetlnego, którego odbicie zachodzi w r.
Jeśli s jest zdarzeniem takim, że

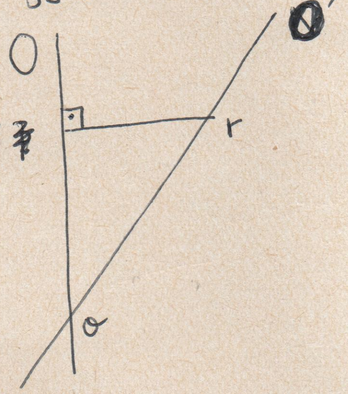
$$q-s = s-p \quad \text{oraz} \quad s \in O$$

to wektory $r-s$ i $s-p$ są wzajemnie ortogonalne. Ich suma, $r-p$ jest wektorem zerowym (postulat III). Odległość zdarzenia r od obserwatora wynosi zatem

$$\frac{1}{2} c\tau(q-p) = c\tau(q-s) = |r-s|.$$

Pomiar prędkości

Rozpatrzmy obserwatora o linii świata O oraz swobodny punkt materialny, którego linia świata O' przecina O w o. Można również uważać, że O' jest linią świata innego obserwatora inercjalnego.



Oznaczmy przez u i u' unormowane wektory kierunkowe prostych O i O', a przez t i t' – czasy własne wzdłuż tych prostych, liczone od o. Niech

$$s = tu + o, \quad r = t'u' + o =$$

oraz

$$r - s \perp u$$

to odległość punktu materialnego od obserwatora ~~można zapisać jako~~

$$|r-s| = Vt,$$

$$r-s = t'u' - tu.$$

Mnożąc to równanie skalarnie przez u, otrzymujemy

$$t' = \frac{t}{uu'},$$

a obliczając kwadrat obu ~~str~~ jego stron, znajdujemy wzór na gdzie

$$V = c\,\frac{\sqrt{(uu')^2 - 1}}{uu'}$$

czyli

$$uu' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Okazuje się, że w rozpatrywanym prostym przypadku, odległość punktu materialnego jest liniową funkcją czasu własnego obserwatora. Współczynnik proporcjonalności V należy nazwać prędkością punktu względem obserwatora.

TW 41

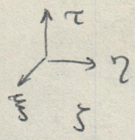
Wreszcie, w przestrzeni Minkowskiego, jeśli nie chce się pisać wskaźników t zamiast

$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$

piszę się

$\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \tau$

baza ortonormalna



zamiast

$x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

$x \quad y \quad z \quad ct$

wówczas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Szczególna teoria względności

Podejście indukcyjne i dedukcyjne

Podstawowe założenie sformułowanej przez Einsteina w 1905 r. teorii względności można wysłowić tak: czasoprzestrzeń fizyczną można utożsamić z przestrzenią Minkowskiego M

punkty M ⟷ zdarzenia

krzywa czasowa (linia świata) ⟷ historia punktu materialnego

prosta zerowa ⟷ historia promienia świetlnego w próżni

prosta czasowa ⟷ " swobodnego punktu mat.

Istnieją zegary idealne, których wskazania są proporcjonalne do interwału mierzonego wzdłuż krzywych opisujących historię tych zegarów. Wszystkie idealne pomiary odległości i odcinków czasu dają się sprowadzić do ~~[illegible]~~ pomiarów wykonywanych przy pomocy zegarów idealnych oraz promieni świetlnych albo są takim pomiarom równoważne.

2 $t_2 = t_1 + \frac{s_{12}}{c}$

1 t_1

TW47

Dynamika relatywistyczna

W jaki sposób ~~sf~~ znaleźć postać równań ruchu cząstek, pól?

Najpewniejszą drogą – w oparciu o doświadczenie

Ale tutaj chcemy to robić w oparciu o ogólne ~~podstawowe~~ zasady

1) zasada korespondencji – (równania dla $v \ll c$ powinny przechodzić w newtonowskie)

(wskazówki) 2) zasada względności – przy formułowaniu praw (równań ruchu)

wolno używać tylko elementów występujących w danej teorii oraz zmiennych dynamicznych potrzebnych do opisu ~~sys~~ układu fizycznego

elementy absolutne	elementy dynamiczne
t, ~~meta~~ geometria newt. potencjał	współrzędne ciała
t, geometria newt. i eter	
przestrzeń Minkowskiego	

N. teoria jednego ciała

Elektrodyn. przedrel.

Teoria względności

Nie wolno wprowadzać obcych elementów absolutnych.

WYKŁAD 12

Grupa automorfizmów albo przekształceń symetrii teorii to grupa przekształceń zachowujących wszystkie elementy absolutne

W szczególności, w teorii Einsteina zasada względności oznacza, że wszystkie układy inercjalne są równie dobre

W jaki sposób uogólnić prawo ruchu

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = F \;?$$

m

$p(s)$

$u = \dfrac{dp}{ds}$

$$mc^2\frac{du}{ds} = F$$

albo

$$mc^2\frac{d^2x^i}{ds^2} = F^i$$

czterowektor prędkości

wprowadzając układ odniesienia

$$ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\,\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^i}{dt}$$

dla $i = 1, 2, 3$ oraz $\frac{v}{c} \ll 1$ koresponduje do $\frac{d}{dt} m \frac{d\vec{x}}{dt}$

TW48

Inne podejście – z zasady hamiltona

$$W = \text{const} \int ds$$

NR: $W = \int L\,dt, \qquad L = \frac{1}{2} m v^2$ dla cząstki swobodnej

$$ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) dt$$

$$W = -mc\int ds \approx \cancel{-mc^2\int dt} + \int \frac{1}{2} m v^2\,dt$$

Korespondencja

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

pęd uogólniony

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

energia

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

teraz można podać interpretację rów. dla $i=4$

$$mc^2 \frac{d^2x^4}{ds^2} = F^4$$

$$\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F^4$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{\ }} F^4$$

prawo zachowania energii

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Big| \vec{v} \qquad \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2 = \vec{F}\vec{v}$ związek między F^4 i $\vec{F}$:

$mc^2\frac{du^i}{ds} = F^i \quad \Big| u_i \qquad u_i u^i = -1$

$F_i u^i = 0$ Pojęcie pola – później. Podany ogólną postać równań ruchu

W8

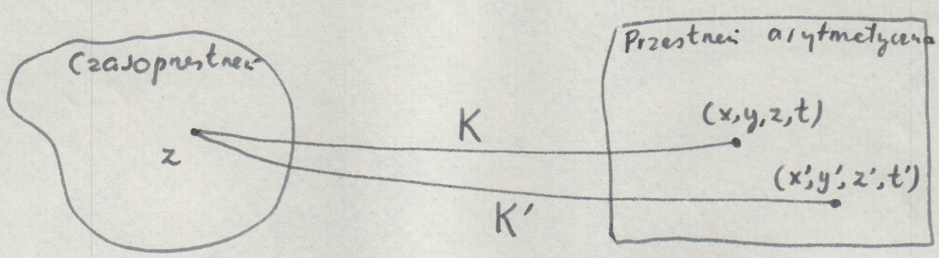
(2)

Oprócz postulatów Einsteina, u podstaw szczególnej teorii względności leży szereg innych założeń, które są wspólne dla teorii Newtona i dla teorii Einsteina. Wymienimy najważniejsze z tych założeń, te z których wyraźnie korzysta się przy formułowaniu szczególnej teorii względności.

1. Wśród rozmaitych związków, które zachodzą między zjawiskami, szczególnie ważne i podstawowe są stosunki czasoprzestrzenne. Do opisu wszelkich zjawisk fizycznych potrzebne jest pojęcie zdarzenia. <u>Zdarzenie</u> jest określone przez podanie miejsca, w którym ono zachodzi i chwili czasu, kiedy zaszło.

Doświadczenie uczy, że aby określić zdarzenie trzeba podać 3 liczby, które określają jego położenie w przestrzeni oraz współrzędną czasu.
<u>Przestrzeń zdarzeń, czyli czasoprzestrzeń, jest przestrzenią o $3+1=4$ wymiarach.</u>

2. <u>Układy współrzędnych</u> (<u>układy odniesienia</u>)



4-wymiarowa: zbiór czwórek liczb (t,x,y,z)

z = zdarzenie

Przyporządkowanie każdemu zdarzeniu punktu przestrzeni arytmetycznej nazywa się układem współrzędnych (odniesienia). Istnieją różne takie przyporządkowania. Znając jedno, K, można podać inny układ współrzędnych przy pomocy wzorów

$$K \to K': \quad \begin{aligned} x' &= x'(t,x,y,z) \\ y' &= y'(\quad) \\ z' &= z'(\quad) \\ t' &= t'(\quad) \end{aligned}$$

W9

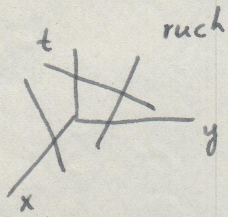
3. <u>Układy inercjalne</u> będziemy układy odniesienia o następujących własnościach:

A. Ciąg zdarzeń odpowiadających dowolnemu <u>ruchowi swobodnemu</u> punktu materialnego daje się zapisać w postaci

$$\vec{r} = \vec{v}\, t + \vec{r}_0 \quad , \quad \vec{v}, \vec{r}_0 = \text{const.}$$

to jest definicja prędkości

Stosuje się to również do promieni świetlnych w próżni. Geometrycznie oznacza to, że w przestrzeni arytmet. ruchom swobodnym odpowiadają <u>linie proste</u>.



B. <u>Odległość</u> dwu zdarzeń zachodzących w pewnym układzie ~~w tej samej chwili~~ wyraża się przy pomocy wzoru

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

Dla zdarzeń równoczesnych odległość* jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych w których te dwa zdarzenia są równoczesne.

C. Przekształcenie między układami inercjalnymi tworzą <u>grupę.</u>

Współrzędne, które są związane z układami inercjalnymi noszą nazwę galileuszowych.

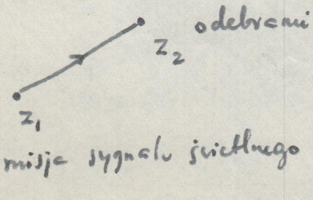
Einstein	Newton
4. Prawa <u>fizyki</u> mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych	Prawa <u>mechaniki</u> mają tę samą postać we wszystkich układach inercjalnych.
5. Prędkość światła w każdym układzie inercjalnym wynosi c (nie zależy od ruchu źródła)	Zdarzenia równoczesne w jednym układzie inercjalnym są równoczesne w każdym układzie inercjalnym.

Na mocy powyższych postulatów można napisać równania, które muszą spełniać <u>transformacje</u> <u>między układami inercjalnymi</u>

3A $\Rightarrow$ związki między t, x, y, z i t', x', y', z' muszą być <u>liniowe</u>

3B & 5 $\Rightarrow$ $c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$c^2(t_1'-t_2')^2 - (x_1'-x_2') - (y_1'-y_2')^2 - (z_1'-z_2')^2 = 0$$



Wprowadzając oznaczenia

$$dt = t_1 - t_2 \ , \quad dx = x_1 - x_2 \ \ldots$$

$$dt' = t_1' - t_2' \ , \ \ldots$$

można poprzedni warunek zapisać w postaci

(W10)

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \iff ds'^2 \equiv c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0$$

Ponieważ przekształcenie $K \to K'$ jest liniowe,

(*) $$ds'^2 = a\, ds^2$$

gdzie a nie zależy od współrzędnych, a tylko od rodzaju przekształcenia $K \to K'$.

Jeśli wprowadzić oznaczenia $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ to ogólna postać transformacji liniowej jest

$$x'^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} a^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha \quad , \quad \alpha = 0,1,2,3$$

Warunek (*) nie narzuca ograniczeń na a^α, które mogą być dowolne. Wystarczy zająć się transformacjami jednorodnymi

$$x'^\alpha = a^\alpha{}_\beta x^\beta \qquad \text{(konwencja Einsteina)}$$

Wśród tych transformacji najprostsze będą takie, przy których czas nie będzie ulegał transformacji:

$$x'^0 = x^0$$
$$x'^k = a^k{}_l x^l \qquad k, l = 1,2,3$$

sumowanie po l od 1 do 3

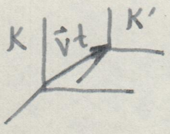
Te transformacje mają tę własność, że nie naruszają równoczesności zdarzeń. Na mocy postulatu 3B zmienne x^k oraz x'^k muszą spełniać

$$\sum_{k=1}^{3} (x_1^k - x_2^k)(x_1^k - x_2^k) = \sum_{k=1}^{3} (x_1'^k - x_2'^k)(x_1'^k - x_2'^k)$$

Oznacza to, że przekształcenie to jest obrotem i dla takich przekształceń

$$ds'^2 = ds^2 \qquad (\text{tzn. } a = 1)$$

Zajmijmy się teraz innym szczególnym wypadkiem - transformacjami, które odpowiadają przejściu od jednego układu inercjalnego do innego, poruszającego się względem tego z prędkością $\vec{V}$, ale z osiami układu wzajemnie równoległymi.



$$K \to K' \qquad ds'^2 = a(\vec{V})\, ds^2$$

$$a(\vec{V}) = a(|\vec{V}|)$$

Weźmy teraz transformację odwrotną, $K' \to K$. Jest ona scharakteryzowana przez $-\vec{V}$:

$$ds^2 = a(-\vec{V})\, ds'^2$$

(W11)

Ponieważ $a(-\vec{V}) = a(|-\vec{V}|) = a(|\vec{V}|)$

to

$$a(|\vec{V}|)^2 = 1 \quad , \quad a = \pm 1$$

Dla $\vec{V} = 0$ mamy $a=1$, stąd z ciągłości $a=1$.

Można pokazać, że również w ogólnym wypadku transformacji między układami inercjalnymi musi być $a=1$. A więc ogólne, przekształcenia $K \to K'$ są scharakteryzowane przez

$$ds'^2 = ds^2$$

Jeśli wprowadzić 'urojony czas' τ przy pomocy wzoru

$$x^0 = ct = i\tau \quad , \quad \tau \text{ urojone}$$

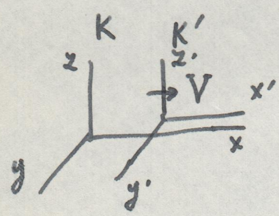
to

$$-ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

a rozpatrywane przez nas transformacje będą pewnego rodzaju 'obrotami' w przestrzeni euklidesowej czterowymiarowej.

Chcemy teraz znaleźć pewną szczególną postać transformacji $x^\alpha \to x'^\alpha$, mianowicie taką, która odpowiada szczególnej transformacji Galileusza

$$t' = t, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$



Rozpatrzmy transformację zmiennych τ, x, y, z, która odpowiada obrotowi w płaszczyźnie τ, x:

$$x' = x \cos\psi - \tau \sin\psi \quad , \quad y' = y$$
$$\tau' = x \sin\psi + \tau \cos\psi \quad , \quad z' = z$$

τ oraz τ' są czysto urojone, x i x' - rzeczywiste, stąd

$$\psi = i\varphi, \quad \varphi = \text{rzecz.} \quad \left(\begin{array}{l} \sin i\varphi = i\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ \cos i\varphi = \mathrm{ch}\,\varphi \end{array}\right)$$

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\varphi - ct\,\mathrm{sh}\,\varphi \quad , \quad y' = y$$
$$t' = t\,\mathrm{ch}\,\varphi - \frac{x}{c}\,\mathrm{sh}\,\varphi \quad , \quad z' = z$$

Rozpatrzmy teraz ruch punktu $x' = y' = z'$ z punktu widzenia układu K:

$$x\,\mathrm{ch}\varphi - ct\,\mathrm{sh}\varphi = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = c\,\mathrm{th}\varphi = V \quad , \quad \mathrm{th}\varphi = \frac{V}{c}$$

W 12

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad \mathrm{sh}\,\varphi = \frac{V/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; , & t' = \dfrac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \, . & z' = z \end{cases}$$

3

Transformacja odwrotna: $(V \to -V)$

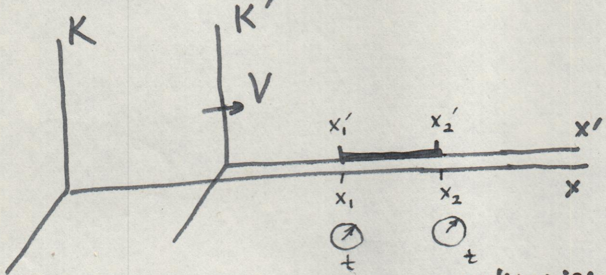
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; , & t = \dfrac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \, . & z = z' \end{cases}$$

Dla $c \to \infty$ wzory te przechodzą w transformację Galileusza.

Wzory powyższe noszą nazwę szczególnych transformacji Lorentza. Ogólne transformacje zachowujące ds^2 noszą nazwę transformacji Lorentza.

Skrócenie Lorentza-Fitzgeralda

Obserwatorzy spoczywający w K umawiają się, że w określonej chwili t czasu mierzonego w K zanotują położenia początku i końca odcinka spoczywającego w K'



zegary pokazujące czas w układzie K

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\underline{\Delta x} = x_2 - x_1 = \underline{\Delta x' \sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \Delta x' = x_2' - x_1'$$

Jeśli l_0 = długość w ukł. spoczynkowym pręta

to

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

Ponieważ wymiary poprzeczne nie ulegają zmianie, to tak samo przekształca się objętość

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

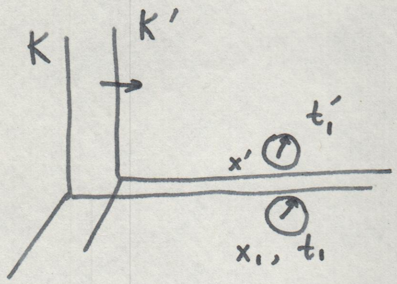
Co powiedzą o pomiarze w K obserwatorzy spoczywający w układzie K'. Jeśli zanotują oni zdarzenia polegające na tym, że obserwatorzy w K wykonują obserwacji położenia początku i końca pręta, to zauważą między nimi różnicę czasu

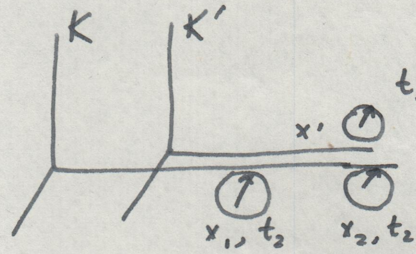
$$t_1' = \frac{t - \frac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad t_2' = \frac{t - \frac{Vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' < t_1' \qquad !$$

Zdarzenia równoczesne z punktu widzenia K nie są równoczesne z punktu widzenia K' – względność równoczesności.

<u>Dylatacja czasu</u>





$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad \Delta t' < \Delta t$$

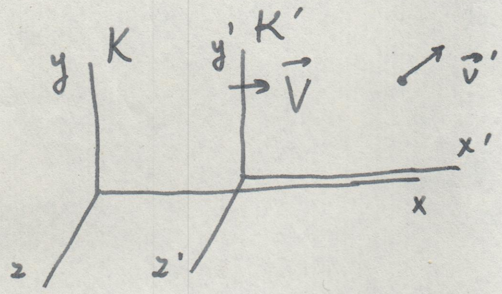
Zegar poruszający się wydaje się iść wolniej.

(414)

Transformacja prędkości

Chcemy odpowiedzieć na następujące pytanie z dziedziny kinematyki: dana jest prędkość $\vec{v}'$ ciała w układzie inercjalnym K', znaleźć prędkość $\vec{v}$ tego ciała w układzie K. W mechanice newtonowskiej odpowiedź jest prosta: jeśli K' porusza się względem K z prędkością $\vec{V}$, to

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$



Ze wzorów

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

wynika związek między

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad i \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

postaci

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$$

$$v_y = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{v_y'}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$$

$$v_z = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{v_z'}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}$$

38 Jeśli $v_y' = v_z' = 0 \iff v_y = v_z = 0$, to prawo składania prędkości przybiera postać

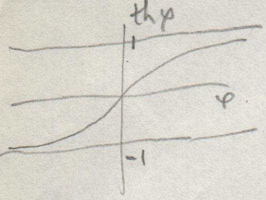
$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}$$

~~Jeśli $v' < c$ i $V < c$ to $v < c$~~:

$$\cancel{\frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}}$$

~~zakł.~~

(W15)



Pisząc $\frac{v}{c} = \operatorname{th}\varphi$, $\frac{v'}{c} = \operatorname{th}\varphi'$, $\frac{V}{c} = \operatorname{th}\Phi$

możemy prawo składania prędkości zapisać w postaci

$$\varphi = \varphi' + \Phi$$

Jeśli $|v'| < c$, $|V| < c$ to φ' oraz Φ są rzeczywiste, a stąd

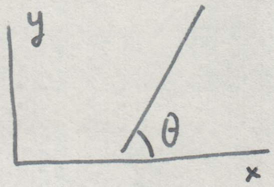
$$|v| < c$$

Można przekonać się również o tym, że w ogólniejszym wypadku, jeśli $|\vec{v}'| < c$ i $|V| < c$ to $|\vec{v}| < c$.
Ale stąd właściwie nie wynika, że nie ma ruchów szybszych niż światło

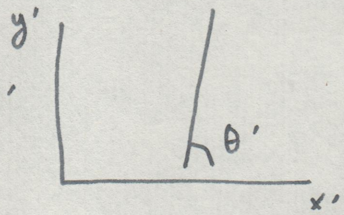
Aberacja światła

Jako przykład zastosowania powyższych wzorów rozpatrzmy zjawisko aberacji światła. Wybieramy układ współrzędnych tak, aby promienie światła leżały w płaszczyźnie x, y

K



K'



Niech

$$v_x' = c\cos\theta' \qquad v_x = c\cos\theta$$
$$v_y' = c\sin\theta' \qquad v_y = c\sin\theta$$
$$v_z' = 0 \qquad v_z = 0$$

$$v_x = \frac{c\cos\theta' + V}{1 + \frac{V\cos\theta'}{c}} = c\cos\theta$$

$$v_y = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{c\sin\theta'}{1 + \frac{V\cos\theta'}{c}} = c\sin\theta$$

Stąd

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{V}{c}}$$

Dla $\theta' = \frac{\pi}{2}$

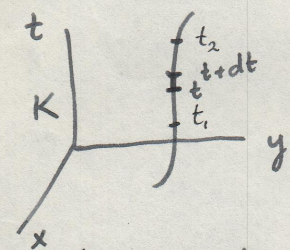
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{V/c}, \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{V/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

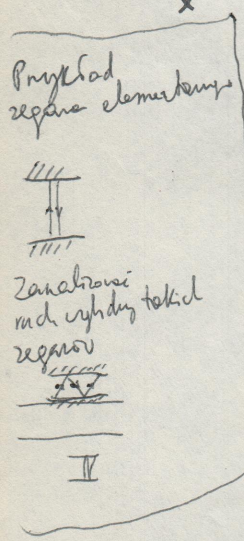
W16

Znaczenie fizyczne interwału

Rozpatrzmy ruch 'elementarnego' zegara, który porusza się, w ogólności ruchem niejednostajnym, tzn. którego linia świata jest krzywą. Przez 'elementarny' rozumiemy taki zegar, który można uważać za punkt materialny i którego chód zależy tylko od bieżącego stanu zegara; np. takim zegarem może być atom promieniujący światło monochromatyczne.

zdefiniować → linia świata





Oprócz tego zakł., że zegar taki spoczywający w ukł. inercjalnym odmierza czas t.

Niech ruch zegara będzie dany w ukł. inercjalnym K. Chcemy znaleźć różnicę wskazań tego zegara między zdarzeniami o współrzędnych t_1, t_2 w K.

Rozpatrzmy krótki odcinek czasu od t do $t+dt$. W tym czasie zegar porusza się w przybliżeniu ruchem jednostajnym. Wprowadźmy układ inercjalny K' w którym zegar chwilowo spoczywa:

$$dx' = dy' = dz' = 0$$

Jego różnica wskazań na tym odcinku wynosi

$$dt' = \frac{ds}{c} \qquad \text{gdyż } dx' = dy' = dz' = 0$$

Wracając do współrzędnych w układzie K:

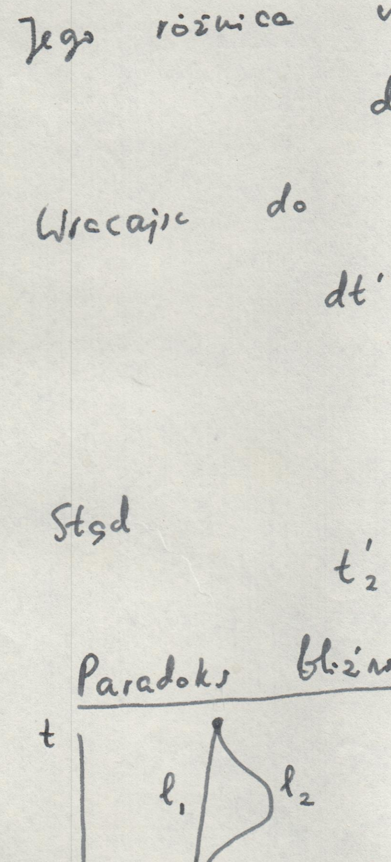
$$dt' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

Stąd

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \leq t_2 - t_1$$

Paradoks bliźniąt



$$\int_{l_1} ds > \int_{l_2} ds$$

ds nie jest różniczką zupełną

Należy mówić o interwale między zdarzeniami wzdłuż krzywej. Jeśli się mówi po prostu o interwale między zdarzeniami, to ma się na myśli interwał obliczony wzdłuż prostej łączącej te zdarzenia.

Ustalmy jakieś zdarzenie w czasoprzestrzeni, wybierzmy układ odniesienia K w którym ono ma wszystkie współrzędne = 0. Interwał między zdarzeniem o współrzędnych t_0, x_0, y_0, z_0 a początkiem układu wynosi

$$s^2 = c^2 t_0^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2$$

Zależnie od znaku, mówimy o interwale

$s^2 > 0$ czasowym

$s^2 = 0$ zerowym

$s^2 < 0$ przestrzennym

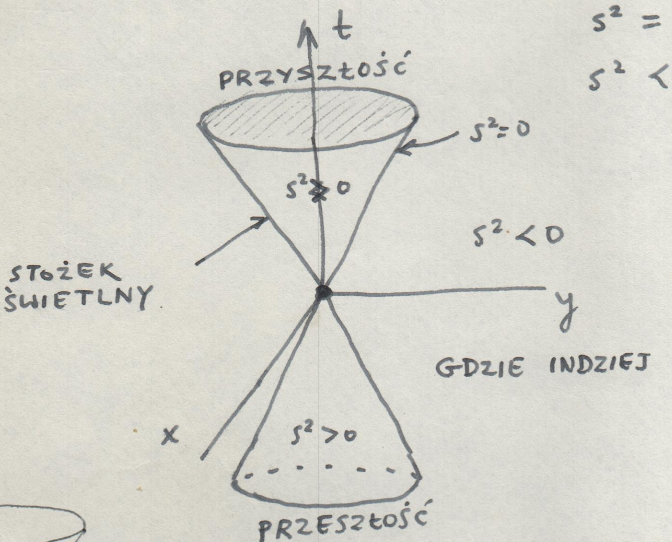
niech drugie zdarzenie będzie $(t_0, x_0, 0, 0)$

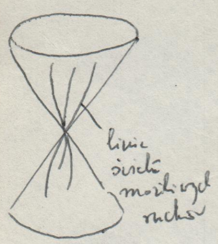
$c^2 t_0^2 - x_0^2 > 0$

to wybierając $v = \frac{x_0}{t_0}$ $|v| < c$

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{\ }}$, $t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{\ }}$

mamy $x'_0 = 0$



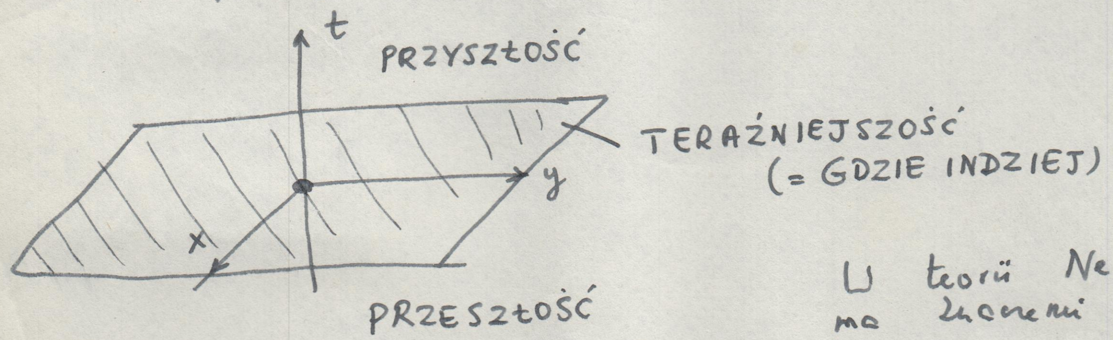


Czasoprzestrzeń Einsteina

Jeśli $s^2 > 0$ to przez wybór układu można uzyskać $s^2 = c^2 t_0'^2$, $x_0' = y_0' = z_0' = 0$ tzn. że w tym układzie oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu.

Jeśli $s^2 < 0$ to przez wybór układu można uzyskać $s^2 = -x_0'^2 - y_0'^2 - z_0'^2$, $t' = 0$ tzn. że oba zdarzenia zachodzą w tym samym czasie, ale gdzie indziej.

Jeśli $s^2 = 0$ to zdarzenia można połączyć przy pomocy sygnału świetlnego.



W teorii Newtona teraźniejszość ma znaczenie bezwzględne.

Czasoprzestrzeń Newtona

W18

Dotychczasowe rozważania dotyczyły kinematyki relatywistycznej - zajmowaliśmy się opisywaniem ruchów, a w szczególności związkami, jakie zachodzą między opisami tego samego ruchu w różnych układach inercjalnych.
Teraz należałoby przejść do dynamiki, tzn. sformułować prawa, które rządzą ruchami. Tutaj dopiero należy skorzystać z postulatu Einsteina o niezależności kształtu praw fizyki od wyboru układu inercjalnego.

Jedna z metod znajdywania praw o takich własnościach polega na zastosowaniu rachunku tensorowego.

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}$$

$$= c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)dt^2 \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \simeq c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)dt$$

rel działania

$$\boxed{W = -mc\int ds} \quad \boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_{rel}\vec{v}$$

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= m_{rel}c^2$$

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad p^0 = mc\frac{dx^0}{ds} = mc^2\frac{dt}{ds} = \frac{mc}{\sqrt{}} = \frac{E}{c}$$

$$p^i = mc\frac{dx^i}{ds} \qquad \vec{p} = mc\frac{d\vec{r}}{ds} = mc\frac{dt}{ds}\vec{v} = \frac{mv}{\sqrt{}} \text{ OK}$$

„czteropęd" „czteroprędkość"

$$g_{ik}\,p^i p^k = m^2c^2 \qquad E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

$$E \simeq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

„energia spoczynkowa"

czterowymiarowe przyspieszenie

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} \qquad w^i u_i = 0$$

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}$$

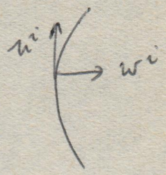
$u^i \stackrel{*}{=} (1,0,0,0)$ czasowy

$w_i \stackrel{*}{=} (0,\cdot,\cdot,\cdot)$ przestrzenny

Ruch jednostajnie przyspieszony = postępowy ruch ze stałym przyspieszeniem (co do modułu)

W przestrzeni Minkowskiego będzie to ruch płaski

$$w_i w^i = -\frac{a^2}{c^4} = -\lambda^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_i}{ds} w^i = 0$$



$$w^i u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dw^i}{ds} u_i + w^i w_i = 0$$

płaskość $\quad \frac{dw^i}{ds} \sim u^i \quad$ stąd $\quad \frac{dw^i}{ds} = \lambda^2 u^i$

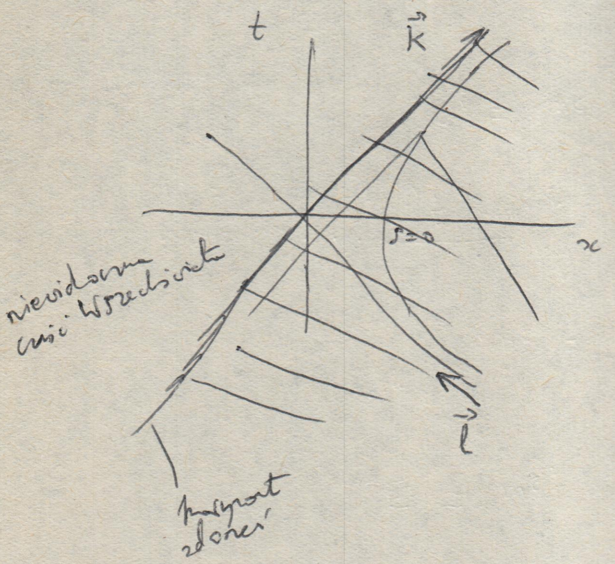
$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} = \lambda^2 u^i$$

$$u^i(s) = e^{\lambda s} k^i + e^{-\lambda s} l^i$$

$$1 = u^i u_i \quad \Rightarrow \quad k^2 = l^2 = 0 \;, \quad k_i l^i = 1/2$$

$$x^i(s) = \frac{e^{\lambda s} k^i - e^{-\lambda s} l^i}{\lambda}$$

$$x^i x_i = -1/\lambda^2 = -c^4/a^2$$



„ruch hiperboliczny"

$$k^i = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$l^i = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$ct = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\lambda s$$

$$x = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\lambda s = \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \lambda s}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{1 + \lambda^2 c^2 t^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \cong \frac{c^2}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2 t^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{x \cong \frac{c^2}{a} + \frac{1}{2} a t^2}$$

31)

$$\mathcal{L}_X \Lambda = X^i \frac{\partial\Lambda}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial \Lambda}{\partial u^j} \nabla_i u_j + X^i \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_A}\nabla_i\psi_A$$

$$= \frac{\partial\Lambda}{\partial u^j}\mathcal{L}_X u^j + \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_A}\mathcal{L}_X\psi_A$$

$$\frac{d}{ds}(p_i X^i) = X^i \frac{Dp_i}{ds} + p_i \nabla_j X^i u^j$$

$$= X^i\Lambda_i - X^i \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_A}\nabla_i\psi_A + p^i u^j \nabla_j X_i$$

$$= X^i\Lambda_i - \frac{\partial\Lambda}{\partial u^j}\mathcal{L}_X u^j - \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_A}\mathcal{L}_X\psi_A + p^i u^j \nabla_j X_i$$

$$+ X^i\frac{\partial\Lambda}{\partial u^j}\nabla_i u_j$$

$$= X^i\Lambda_i - \frac{\partial\Lambda}{\partial\psi_A}\mathcal{L}_X\psi_A + \frac12\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial u^k}u^k - \Lambda\right)u^i u^j(\nabla_i X_j + \nabla_j X_i)$$

$$- \frac{\partial\Lambda}{\partial u^j}\mathcal{L}_X u^j - \frac{\partial\Lambda}{\partial u^i}u^j\nabla_j X_i + X^i\frac{\partial\Lambda}{\partial u^j}\nabla_i u_j$$

$$\mathcal{L}_X u^j = u^j{}_{,i}X^i - X^j{}_{,i}u^i$$

$$= X^i\nabla_i u^j - u^i\nabla_i X^j$$

$$- \cancel{X^i\Gamma^j_{ik}u^k} + \cancel{u^i\Gamma^j_{ik}X^k}$$

bo koneksja symetryczna

jeśli

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_i = 0 \\ &\mathcal{L}_X\psi_A = 0 \\ &\mathcal{L}_X g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0 \end{aligned}\right\} \text{ to } \quad p_i X^i = \text{const}$$

izometria

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = g_{ij,k}X^k + g_{kj}X^k{}_{,i} + g_{ik}X^k{}_{,i}$$

$$\mathcal{L}_X g_{ij}dx^i\otimes dx^j = g_{ij,k}X^k dx^i\otimes dx^j + g_{ij}\underbrace{\mathcal{L}dx^i}_{d\mathcal{L}x^i = dX^i}\otimes dx^j + \dots$$

35

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_i = 0 \\ \mathcal{L}_X g_{ij} = 0 \\ \mathcal{L}_X \psi_A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_i X^i = \text{const}$$

W przestrzeni płaskiej, $g_{ij} \overset{*}{=} \text{const}$,

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = 0 \iff X_i^{*} = a_i + \omega_{ij} x^j$$

$$a, \omega = \text{const}, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

w przestrzeni n-wymiarowej ilość liniowo niezal. rozw. wynosi $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

wektorowi $X^i = a^i$ odpowiada przesunięcie

$$\varphi^i_t(x) = x^i + t a^i$$

natomiast wektorowi $X^i = \omega^i{}_j x^j$ odpowiada rozwiązanie równania

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi^i_t}{dt} = \omega^i{}_j \varphi^j_t \\ \varphi^i_0(x) = x^i \end{array}\right\} \quad (*)$$

czyli

$$\varphi^i_t(x) = x^i + \omega^i{}_j x^j t + \frac{1}{2}\omega^i{}_k \omega^k{}_j x^j t^2 + \dots$$

$$= (e^{\omega t})^i{}_j x^j$$

gdzie $L^i{}_j(t) \underset{df}{=} (e^{\omega t})^i{}_j = \delta^i_j + \omega^i{}_j t + \frac{1}{2}\omega^i{}_k \omega^k{}_j t^2 + \dots$

tzn. $\varphi^i_t(x) = L^i{}_j(t) x^j$

udowodnimy, że $(L^i{}_j(t))$ jest macierzą przekształcenia Lorentza

Rozwiązanie z (*)

$$\frac{dL^i{}_j(t)}{dt} = \omega^i{}_k L^k{}_j(t) \quad , \quad L^i{}_j(0) = \delta^i_j$$

Niech

$$g_{kl}(t) \underset{\text{def}}{=} L^i{}_k(t)\, L^j{}_l(t)\, g_{ij} \quad , \quad g_{kl}(0) = g_{kl}$$

to

$$\frac{dg_{kl}(t)}{dt} = (\omega^i{}_p L^p{}_k L^j{}_l + \omega^j{}_p L^i{}_k L^p{}_l)\, g_{ij}$$

$$= \omega_{jp} L^p{}_k L^j{}_l + \omega_{ip} L^i{}_k L^p{}_l = 0$$

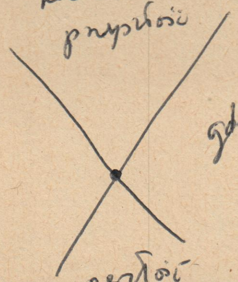
czyli

$$\boxed{L^i{}_k(t)\, L^j{}_l(t)\, g_{ij} = g_{kl}}$$

Okazuje się, że każdą (właściwą) transformację ~~ortogonalną~~ Lorentza można tak otrzymać.

$$(\det L^i{}_j)^2 = 1 \qquad \det L^i{}_j = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Podział ze względu na ~~wektory~~ ~~kierunek~~ zachowanie kierunku czasu



jeśli t^i, s^i - czasowe

to albo

$g_{ij} t^i s^j > 0$

albo

$g_{ij} t^i s^j < 0$

$$g_{ik} L^i{}_j t^j t^k \quad \begin{cases} > 0 & L \text{ nie zmienia kierunku czasu} \\ < 0 & \text{zmienia} \end{cases}$$

grupa Lorentza $\mathcal{L} = \underset{\text{podgrupa właściwa}}{\mathcal{L}_+^\uparrow} \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$

$\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ podgrupa, $\underline{\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow}$ ortochroniczna

7)

Przykład Znaleźć całki równań ruchu ładunku w polu liniowo spolaryzowanej fali płaskiej

$$\Lambda = -mc - \frac{e}{c} u^i A_i$$

$$P_i = mcu_i + \frac{e}{c} A_i$$

pole płaskie o liniowej pol.

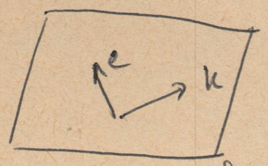
$$A^i = e^i A(\sigma) \quad \text{gdzie} \quad \sigma = k_i x^i$$

$$k^2 = 0 \Rightarrow \Box A^i = 0$$
$$e^i k_i = 0 \Rightarrow A^i{}_{,i} = 0$$
$$e^2 = -1$$

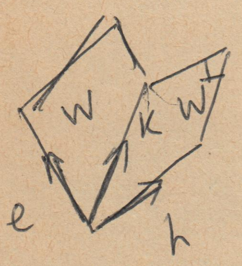
pole e.m.

$$f_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j} = \underbrace{(e_j k_i - e_i k_j)}_{k \wedge e} \dot{A}$$

prosta dwuforma wzgl. biwektor



W jest płaszczyzną zerową bo $k \perp W$ tzn. $W^\perp \cap W \neq \{0\}$



$(k \wedge e)^\perp$ jest biwektorem odpowiadającym $W^\perp$

określone jest wprowadzić orientację

$$(k \wedge e)^\perp = k \wedge h$$

gdzie $h^i k_i = 0 = h^i e_i$, $\quad h^2 = -1$

można wprowadzić czwarty wektor l też zerowy, tak aby

npr.
$k = (1, 0, 0, 1)$
$e = (0, 1, 0, 0)$
$h = (0, 0, 1, 0)$
$l = (1, 0, 0, -1)$

	k	e	h	l
k	0	0	0	2
e		-1	0	0
h			-1	0
l				0

albo
$m = e + ih$
$\bar{m} = e - ih$

"tetrad" tzn. baza zerowa

	k	m	$\bar{m}$	l
k	0	0	0	2
m	0	0	-2	0
$\bar{m}$	0	-2	0	0
l	2	0	0	0

często dzieli się przez $\sqrt{2}$ żeby mieć też jedynki

to jest macierz tensora metr. wzgl. tej bazy

38

Znajdujemy teraz symetrie fali płaskiej

$$\underset{X}{\mathcal{L}} A^i = A^i{}_{,j} X^j - X^i{}_{,j} A^j$$

dla $X^i = \text{const}$: $A^i{}_{,j} X^j = e^i \dot{A} k_j X^j = 0$

czyli $X^i \sim k^i, e^i, h^i$ 3 całki

dla $X^i = \omega^i{}_j x^j$

$$e^i \dot{A} k_j \omega^j{}_k x^k - \omega^i{}_j e^j A = 0 \quad \Big| \; e_i$$

daje $k_j \omega^j{}_k = 0$

$$\omega^i{}_j e^j = 0 = k_j \omega^j{}_k$$

ω = kombin. liniowa $\cancel{k \wedge e}$, $k \wedge h$, $e \wedge h$, $\cancel{k \wedge l}$ $\cancel{l \wedge e}$ $\cancel{l \wedge k}$

$$\omega_{ij} \sim k_i h_j - k_j h_i$$

Mamy razem cztery całki ruchu

Jakie przedstawienie Lorentza odpowiadają ~~temu~~ ~~[illegible]~~?

$$\omega^i{}_j = k^i h_j - h^i k_j$$