POLSKA AKADEMIA NAUK

TEORIA WZGLĘDNOŚCI

Andrzej Trautman

OSSOLINEUM 1971

POLSKA AKADEMIA NAUK

Andrzej Trautman

TEORIA WZGLĘDNOŚCI

WROCŁAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK
1971

Adres Redakcji: Warszawa, ul. Grójecka 17
Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Oddział w Warszawie
Telefon: 23-29-13

Tekst wykładów wygłoszonych w cyklu:
„OSIĄGNIĘCIA NAUKI POLSKIEJ"

Na podstawie wykładów wygłoszonych przez
Autora opracował WOJCIECH KOPCZYŃSKI

Okładkę projektował:
KRZYSZTOF DOBROWOLSKI

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo, Wrocław, Oddział w Warszawie 1971. Wydanie I. Nakład 450+100 egz. Objętość 9,62 ark. drukarskich. Papier offsetowy III kl., 70 gram., 61×86. Oddano do druku 28. VI. 71. Wydrukowano w październiku 1971 r. w Warszawskiej Drukarni Naukowej, Warszawa, Śniadeckich 8; zam. 626/o/71. U-103. Cena zł 20.—

SPIS TREŚCI

		Str.
I.	Zjawiska fizyczne, modele, teorie	5
	Wstęp	5
	Zjawiska fizyczne i modele.	8
	Literatura.	22
II.	Czasoprzestrzeń Galileusza.	23
	Literatura.	41
III.	Próby wykrycia eteru.	42
	Literatura.	53
IV.	Przewidywania teorii względności oraz ich doświadczalne sprawdzenie	53
	Literatura.	68
V.	Geometria Minkowskiego.	68
	Literatura.	88
VI.	Przestrzeń prędkości. Spinory i kształt ciał w ruchu	88
	Literatura.	101
VII.	Newtonowska teoria grawitacji i zasada równoważności.	101
	Literatura.	111
VIII.	Podstawy ogólnej teorii względności	112
	Literatura.	124
IX.	Niektóre zagadnienia ogólnej teorii względności .	125
	Literatura.	135
X.	Przegląd zjawisk przewidywanych przez teorię grawitacji Einsteina	136
	Kosmologia.	150
	Grawitacja a zjawiska kwantowe.	151
	Literatura.	153

I. ZJAWISKA FIZYCZNE, MODELE, TEORIE

Wstęp

Teoria względności powstała w latach 1905–1916. Mimo że od tego czasu minęło ponad pół wieku, jest ona jeszcze przedmiotem znacznego zainteresowania. Jakie mogą być tego przyczyny? Pierwsza, chyba najważniejsza, jest taka, że teoria względności dotyczy pojęć podstawowych, z którymi wszyscy stykają się i o których każdy wyrabia sobie pewne wyobrażenie, a mianowicie pojęć czasu i przestrzeni. Pewne znaczenie ma też osoba twórcy tej teorii, osoba Einsteina, który był indywidualnością wybitną, oryginałem o niezwyczajnym sposobie bycia, co z pewnością pobudza ludzką wyobraźnię i skłania do zainteresowania się jego teorią.

Pewien wpływ odegrał sam okres powstawania teorii względności: były to lata, kiedy rozwijała się nowa technika, coraz powszechniej stosowana była energia elektryczna, zjawiały się pierwsze samoloty i rozpoczynała się epoka radia. Osiągnięcia techniki przekonywały wszystkich o znaczeniu nauki również dla życia codziennego. Równocześnie ilość nowych odkryć, wynalazków i osiągnięć technicznych nie była tak duża, aby nie można było skupić się i zastanowić nad nimi. Dzisiaj nowe osiągnięcia naukowe i techniczne stały się tak powszednie, że trzeba aż wylądowania ludzi na Księżycu, aby wzbudzić szersze zainteresowanie i podziw dla pracy inżynierów i uczonych.

Nie bez znaczenia są też czynniki, które można by nazwać subiektywnymi. Chodzi o działalność popularyzatorów, często samych fizyków, którzy zabrali się ze szczególną energią do popularyzacji, a nieraz i wulgaryzacji teorii względności. Dlaczego tak się stało? Zapewne dlatego, że opowiadając o teorii względności można "zadziwić mieszczan". Mamy tu na myśli

możliwość, z której często korzystano, takiego przedstawienia wniosków z teorii względności, aby wywołać u słuchaczy wrażenie, że ich wszystkie dotychczasowe wiadomości o czasie i przestrzeni są błędne, a prawdziwy obraz świata jest dostępny tylko dla wtajemniczonych specjalistów. Takie podjeście do popularyzacji teorii względności spowodowało z jednej strony żywe zainteresowanie i liczne dyskusje na jej temat, a z drugiej - to, że do dziś zdarzają się ludzie odrzucający całość teorii Einsteina i próbujący cofnąć fizykę do okresu przedrelatywistycznego.

W początkowym okresie swojej historii teoria względności szczególnie nadawała się do popularyzacji, gdyż materiał doświadczalny, stanowiący jej potwierdzenie, był dość ubogi i łatwy do opisu przystępnego dla laika. Wystarczało wtedy omówić doświadczenia Michelsona - Morleya i Troutona-Noble'a. Obecnie, oczywiście, tak nie jest, istnieje wiele bardzo dokładnych pośrednich i bezpośrednich sprawdzianów szczególnej teorii względności, ale świadomość tego nie dotarła jeszcze do szerszej publiczności. Wiele osób ciągle sądzi, że teoria względności jest nie do pojęcia dla laika, jej wyniki paradoksalne, a podstawę doświadczalną stanowią jedynie pomiary prędkości światła.

Nie będziemy się tu zajmowali takimi sformułowaniami jak: według Einsteina wszystko jest względne, czas jest urojony, a materia może zamieniać się w energię. Te pozorne mądrości powstały na marginesie nauki i nie mają nic wspólnego z tym, co twierdzi się w teorii względności, rozumianej jako część fizyki.

Wypowiedziane wyżej krytyczne uwagi pod adresem popularyzatorów częściowo wyjaśniają, co będzie treścią niniejszych wykładów. Po pierwsze, zgodnie z założeniem cyklu odczytów i publikacji organizowanych przez Polską Akademię Nauk, którego częścią jest niniejszy tekst, będzie tu mowa o osiągnięciach polskich fizyków, głównie warszawskiej szkoły Leopolda Infelda, na tle światowego rozwoju teorii względności. Drugie, niemniej ważne zadanie, to przynajmniej częściowe rozwianie pe-

wnych mitów i nieporozumień, które powstały wokół teorii względności. Dobrze składa się, że te dwa zadania będą się splatać ze sobą, ponieważ właśnie polscy fizycy mają w dziedzinie wyjaśniania i obalania owych mitów niemałe osiągnięcia.

Jako przykład wymienimy tu kwestię tak zwanych układów kopernikańskich. Otóż w części teorii względności, zajmującej się zjawiskami grawitacyjnymi, formułuje się postulat, który mówi, że wszystkie, nie tylko inercjalne układy odniesienia, są jednakowo dobre do opisu zjawisk przyrody. Z nazbyt kategorycznego sformułowania tego postulatu niektórzy filozofowie wyciągają wniosek, że skoro wszystkie układy odniesienia są jednakowo uprzywilejowane, to, zwłaszcza, układ związany z Ziemią jest tak samo dobry jak układ związany ze Słońcem. Godząc się z tym podważalibyśmy osiągnięcia Kopernika, który właśnie zwrócił uwagę na to, że Ziemia i inne planety obracają się wokół nieruchomego Słońca. Temat ten był dyskutowany w Warszawie w latach pięćdziesiątych i został podjęty przez Infelda [2] , który zwrócił uwagę na to, że ogólna teoria względności nie wypowiada się tak kategorycznie o równym uprawnieniu wszystkich układów, zwłaszcza że do opisu systemu planetarnego pewne układy związane ze Słońcem są znacznie wygodniejsze i odgrywają wyraźnie uprzywilejowaną rolę w stosunku do układów ptolemeuszowskich związanych z Ziemią. Wynika z tego, że teoria Einsteina w niczym nie narusza epokowego znaczenia odkrycia Kopernika.

Inny przykład, o którym warto wspomnieć, to zagadnienie realności i widzialności pewnych efektów ogólnej teorii względności. Temat ten był rozważany przez Jerzego Plebańskiego i Joannę Ryteń [4] . Chodzi z grubsza o to, czy wyniki obliczeń wykonywanych przy użyciu odpowiednich układów odniesienia pokrywają się z tym, co widzą obserwatorzy. Plebański i Ryteń zbadali, w jakim stopniu wyniki tych rachunków mają charakter obiektywny, a więc odpowiadają obserwacjom, oraz jak można wyniki te, formułowane przy pomocy układów

współrzędnych, tłumaczyć na wielkości dające się bezpośrednio porównać z doświadczeniami.

Szczegółowo omówimy geometrię różnych modeli czasu i przestrzeni, zwracając uwagę na podobieństwa i różnice między modelami newtonowskimi i einsteinowskimi [5-7]. Poświęcimy sporo uwagi zagadnieniom, które trafiają do popularnych opracowań i często są niewłaściwie przedstawiane. Mamy tu na myśli między innymi tzw. paradoks bliźniąt, zagadnienie widzialności relatywistycznego skrócenia długości [1] i problem istnienia ruchów szybszych od światła.

Zjawiska fizyczne i modele

Zajmiemy się obecnie stosunkiem teorii względności do innych teorii fizycznych. Omówienie stosunku różnych działów fizyki do siebie jest utrudnione przez to, że cała fizyka została niejako poszufladkowana w oparciu o rozwój historyczny, co nie odpowiada w pełni dzisiejszemu stanowi wiedzy. Tradycyjnie mamy do czynienia z takimi działami jak mechanika, termodynamika, elektromagnetyzm, optyka, teoria cząstek elementarnych, fizyka ciała stałego, teoria względności i inne. Fizycy zdają sobie doskonale sprawę z tego, że niezależność tych działów jest tylko pozorna, a wymieniony tu podział nie jest adekwatny.

Aby móc zastanowić się nad tym, jaki jest stosunek różnych teorii fizycznych do siebie i jaki byłby właściwy głębszy podział fizyki, trzeba zejść do samych podstaw i spytać o przedmiot badań fizyki. Nie siląc się na pozornie uczone definicje, można stwierdzić, że fizyka zajmuje się tymi spośród zjawisk przyrody, które są stosunkowo proste i w których przebiegu można wyodrębnić kilka zasadniczych, charakterystycznych wielkości oraz podać kilka czynników, decydujących o ich przebiegu. Niemniej ważnym kryterium jest powtarzalność zjawiska: fizycy zajmują się tylko zjawiskami powtarzalnymi, takimi, które można realizować dowolnie wiele razy.

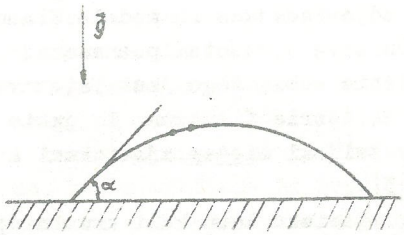
Dzięki temu że fizycy ograniczają się do zjawisk prostych,

mogą budować odpowiadające im modele. Właśnie budowanie modeli jest zasadniczym elementem poznawczej działalności fizyka. Uświadomienie sobie tego jest istotnym warunkiem zrozumienia, czym są teorie fizyczne i jakie są stosunki między nimi. Omówimy związki między zjawiskami a modelami na kilku przykładach [3].

Rozpatrzmy zjawisko lotu kuli armatniej lub, inaczej mówiąc, rzut ukośny ciała w pobliżu powierzchni Ziemi. W tym zjawisku (w potocznym znaczeniu tego słowa) można wyodrębnić przynajmniej trzy zjawiska fizyczne albo grupy takich zjawisk:

1) zjawisko ruchu ciała w polu grawitacyjnym;
2) zjawiska aerodynamiczne, a wśród nich akustyczne;
3) zjawiska cieplne.

Skoncentrujemy się wyłącznie na mechanicznej stronie tego zjawiska, a więc na zjawisku rzutu ukośnego w wąskim sensie. Trzeba tu wyróżnić dwa czynniki decydujące o jego przebiegu, a są to, jak wiadomo, początkowa wartość prędkości i kąt rzutu oraz przyciąganie Ziemi. Jeżeli pominiemy opór powietrza, co można zrobić w pewnym zakresie prędkości i przy pewnych założeniach dotyczących masy, kształtów i rozmiarów tego ciała, to ani masa, ani kształt, ani rozmiar nie mają wpływu na przebieg tego zjawiska. Znalezienie tego, co jest istotne w danym zjawisku, nie jest na ogół łatwe i wymaga pomysłowości oraz intuicji fizyka zajmującego się tym zagadnieniem. Gdy stwierdzi się, co jest istotnym czynnikiem w przebiegu zjawiska rzutu ukośnego, można np. metodami fotograficznymi badać tor, po którym porusza się kula armatnia, oraz jego przebieg czasowy (rys. I.1). Następnie należy znaleźć prawo matematyczne, które będzie stanowiło podstawę matematycznego modelu tego zjawiska. Jak wiadomo, prawo to jest postaci $m\vec{r} = m\vec{g}$ i wszystko, co można powiedzieć na temat rzutu ukośnego, jest zawarte w tym równaniu różniczkowym. Gdybyśmy chcieli uwzględnić wpływ tarcia, wówczas trzeba by tylko zmienić nieco postać tego równania różniczkowego, a mianowicie dodać do jego prawej strony siłę tarcia. Oczywiście,



Rys. I.1

przed napisaniem tego równania trzeba dodać, że mamy do czynienia z przestrzenią euklidesową, w której rozpatruje się krzywe spełniające powyższe równanie różniczkowe. Krzywe te wraz z parametryzacją opisują zarówno tor, jak i przebieg czasowy rzutu. W ten sposób mamy matematyczny model zjawiska rzutu ukośnego.

Następny krok został wykonany przez Newtona, który odkrył, że zjawisko spadania ciał na Ziemię ma taką samą przyczynę jak zjawisko ruchu planet wokół Słońca lub też Księżyca wokół Ziemi. Następnie podał on prawo matematyczne, które opisywało wszystkie te zjawiska, a mianowicie tzw. prawo powszechnego ciążenia. Wobec tego że prawo to opisuje szeroką klasę zjawisk, mówimy zwykle, że mamy do czynienia z teorią. Rozgraniczenie między teorią a modelem nie jest zbyt ostre. Ogólnie mówiąc, modele stosują się do pojedynczych zjawisk lub do grup zjawisk podobnych, teorie zaś dostarczają zwykle modeli różnych zjawisk, nieraz pozornie dość odległych.

Inny, nieco mniej trywialny przykład będzie dotyczyć atomu wodoru. Historycznie pierwszym modelem był tutaj model Thomsona, który przyjmował, że atom wodoru można przedstawić jako kulę dodatnio naładowanej cieczy, w której porusza się ujemnie naładowany punktowy elektron. Drugim z kolei był model planetarny Bohra. Mamy tutaj do czynienia z dodatnio naładowanym punktowym jądrem i poruszającym się wokół niego po elipsie, zgodnie z prawami klasycznej mechaniki, elektronem

Rys. I.2

(rys. I.2). Do tych praw, wynikających z zasad mechaniki klasycznej, dodaje się jeszcze tzw. warunki kwantowe, które mówią, że moment pędu tego elektronu oraz jego działanie może przyjmować tylko pewne określone wielkości.

Kolejny model atomu wodoru to model Schrödingera ortzymany w ramach szerszej teorii fizycznej, a mianowicie mechaniki kwantowej. Model ten jest całkowicie różny od dwu poprzednich. Podstawowym pojęciem jest tutaj przestrzeń Hilberta, w której wyróżnia się pewien operator hermitowski (hamiltonian). Jego wartości własne określają poziomy energii atomu wodoru, a co za tym idzie - częstości światła emitowanego przez ten atom. Wektory własne hamiltonianu też posiadają interpretację fizyczną - dają one pełną informację o ruchu elektronu.

Historycznie następny model to model Diraca otrzymywany w relatywistycznej mechanice kwantowej. Model ten właściwie niewiele różni się od modelu Schrödingera. Nieco inna jest tutaj przestrzeń Hilberta, a postać operatora hermitowskiego, którego wartości własne dają poziomy energetyczne, jest zgodna ze szczególną teorią względności.

W ten sposób mamy cztery (nie są to wszystkie) modele matematyczne zjawisk związanych z atomem wodoru, czyli - krótko mówiąc - modele atomu wodoru. Dwa pierwsze z przytoczonych tu modeli są poglądowe, czego nie można powiedzieć o dwu następnych. Przez poglądowość rozumiemy to, że punkty material-

ne, a więc twory matematyczne - abstrakcyjne, o których mowa w dwu pierwszych modelach, w nietrudny do wyobrażenia sobie sposób odpowiadają tworom fizycznym - jądru i elektronowi. Rzeczywiście, poglądowość jest tak daleko posunięta, że zwykle rysujemy wykresy funkcji otrzymywanych przez rozwiązywanie równań tych modeli i uważamy je za rysunki atomu wodoru. Zupełnie inaczej jest w modelach kwantowych, opartych na przestrzeni Hilberta i ograniczanych zasadą nieoznaczoności, która zabrania równocześnie przypisywać cząstce określone położenie i pęd.

Mechanika kwantowa wywołała znacznie większą rewolucję w strukturze teorii fizycznych niż teoria względności. Gdybyśmy stworzyli relatywistyczny, lecz niekwantowy, model atomu, wówczas byłby on tak samo poglądowy jak model Bohra. Natomiast model Diraca jest równie niepoglądowy jak model Schrödingera. "Cięcie poglądowości" następuje między modelami kwantowymi a modelami niekwantowymi, nie ma natomiast takiego cięcia między modelami relatywistycznymi a modelami nierelatywistycznymi.

Budując matematyczne modele zjawisk fizycznych, trzeba określić następującą odpowiedniość:

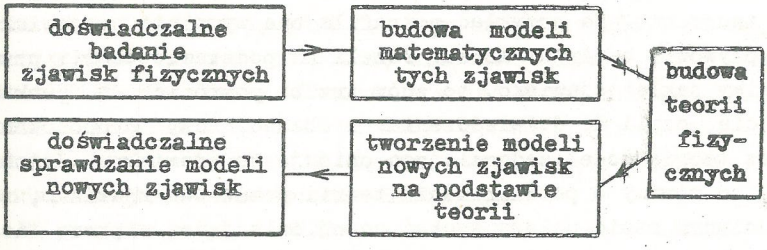
model		świat
wyniki obliczeń wielkości matematyczne w ramach modelu	⟷	wyniki pomiarów obserwowalne wielkości fizyczne

Trzeba umieć odpowiedzieć na pytanie: które z wielkości matematycznych występujących w modelu odpowiadają obserwowanym wielkościom fizycznym, a dokładnie: które z wyników rachunkowych i w jaki sposób odpowiadają rozmaitym wynikom pomiarów? W przypadku gdy mamy do czynienia z modelami klasycznymi, jest to dosyć łatwe. Na przykład jeśli chodzi o rzut ukośny, to mamy równanie różniczkowe $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$, które należy rozwiązać przy określonych warunkach początkowych. Otrzymamy w ten sposób pewne funkcje zmiennej t. Chcąc teraz podać położenie kuli armatniej w jakiejś chwili czasu, trzeba znaleźć

wartość tych funkcji dla odpowiednich wartości parametru t, interpretowanego jako czas. Liczby te ustalą położenie (odległości) naszej kuli względem odpowiedniego układu odniesienia. Można podać bardzo precyzyjne przepisy na to, jak należy wiązać rozwiązania tego równania różniczkowego z wynikami pomiarów położenia wykonywanych za pomocą miarek, teodolitów, zdjęć fotograficznych itp. To samo można zrobić również dla modeli kwantowych, chociaż sprawa ta ze względu na utratę poglądowości nie jest już tak prosta. Tu za pomocą pewnych operacji matematycznych otrzymuje się z elementów przestrzeni Hilberta liczby, które dadzą porównać się z doświadczeniem. Przepis ten w tym przypadku nie jest już tak oczywisty jak w mechanice klasycznej. Również w teorii względności odpowiedniość między pojęciami matematycznymi a tym, co mierzy się, nie jest zupełnie oczywista. Nie wszyscy zdają sobie z tego sprawę i wynika z tego sporo nieporozumień. Uwaga ta dotyczy, między innymi, paradoksu bliźniąt.

Teorie fizyczne

Powiedziawszy o zjawiskach fizycznych, o modelach i o teoriach, możemy podać schemat, który będzie ilustrował, w jaki sposób odbywa się, z grubsza biorąc, rozwój fizyki:



Omówmy ten schemat. Punktem wyjścia, a zarazem najważniejszą częścią całej fizyki jest doświadczalne badanie zjawisk fizycznych. Fizycy nie korzystają wtedy w zasadzie z modeli, choć kierują się nimi w wyborze i przy projektowaniu doświad-

czeń. Następnie, analizując pomiary oraz jakościowe wyniki doświadczeń, buduje się modele matematyczne badanych zjawisk. Modele te zwykle opisują jedno zjawisko lub grupę zjawisk podobnych. Następny krok to budowa teorii fizycznej.

Teoria fizyczna ma za zadanie dostarczać modeli szerokiej klasy zjawisk; niejednokrotnie zjawiska te wydają się być bardzo od siebie odległe. Poprzednio mieliśmy do czynienia z teorią ciążenia powszechnego, która dostarczała modelu zarówno dla zjawiska rzutu w pobliżu powierzchni Ziemi, jak i dla zjawiska ruchu planet wokół Słońca.

Zwykle tak zdarza się, że na podstawie teorii możemy opisać więcej zjawisk niż te, które były brane pod uwagę przy jej budowie. Często jednym z kryteriów przyjęcia albo odrzucenia danej teorii jest to, czy można z jej pomocą opisywać nowe zjawiska. Dobrym przykładem jest tu tzw. starsza teoria kwantów, która powstała na gruncie modelu atomu wodoru Bohra i była w stanie opisać niewielką liczbę zjawisk związanych z atomami, a i to za pomocą coraz to nowych założeń. Dlatego też trudno nawet mówić o starszej teorii kwantów jako o teorii w sensie tego, co zostało powyżej powiedziane, a raczej powinno się ją uważać za zbiór kilku modeli mających niektóre wspólne cechy.

Wracając do teorii grawitacji Newtona warto przypomnieć, że podała ona modele, które nie były brane pod uwagę przy jej tworzeniu. Na przykład potrafiła ona wyjaśnić zjawisko przypływów i odpływów morza. Jeżeli na podstawie teorii przewidzimy jakieś zjawisko, to znów trzeba powrócić do punktu wyjścia, czyli do doświadczenia, i zbadać, czy proponowany przez teorię model zadowalająco opisuje to zjawisko. Jeżeli tak, to mówimy o potwierdzeniu teorii przez owo zjawisko, w przeciwnym razie należy szukać nowej, opisującej większą liczbę zjawisk, teorii.

W jakim sensie modele zjawisk fizycznych mają charakter modeli matematycznych? W wielu przypadkach wręcz dosłownie. Na przykład równanie różniczkowe, będące modelem rzutu ukośnego, jest pewnym fragmentem teorii równań różniczkowych.

Wszystko na temat tego, jak to równanie rozwiązuje się i jakie będą własności tego rozwiązania, można z całą precyzją powiedzieć. Właściwie cała mechanika klasyczna punktów materialnych ma taki charakter - jest ona pewnym działem teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Podobnie ma się sprawa z elektrodynamiką klasyczną, jeśli nie brać pod uwagę występowania ładunków punktowych, a ograniczyć się do materii naładowanej, rozłożonej w sposób ciągły. Wówczas cała teoria Maxwella staje się działem teorii równań różniczkowych cząstkowych.

Często jednak bywa tak, że fizycy nie sprowadzają modelu zjawisk fizycznych do fragmentu matematyki, lecz tworzą coś, o czym żywią nadzieję, że stanie się modelem matematycznym. Jako przykład można tu wymienić historię tzw. funkcji δ Diraca. Pojęcie to zostało wprowadzone przez fizyków, chociaż każdy, kto trochę był zaznajomiony z teorią całki, mógł łatwo udowodnić twierdzenie, na mocy którego funkcje takie nie istniały. Fizycy używali tego niezbyt precyzyjnego pojęcia przez przeszło dwadzieścia lat, dopóki matematycy nie stworzyli teorii dystrybucji, która wyjaśniała,czym właściwie są te "funkcje", a tym samym sankcjonowała ich używanie.

Inny, bardziej współczesny przykład, to tzw. uogólnione przestrzenie Hilberta. Okazuje się mianowicie, że do pewnych zagadnień mechaniki kwantowej nie wystarcza pojęcie zwykłej przestrzeni Hilberta, gdyż np. wygodnie jest mówić o wektorach o nieskończonej długości, mimo że takich w przestrzeniach Hilberta nie ma. Obecnie również tutaj nie ma sprzeczności, albowiem został dobudowany odpowiedni fragment matematyki, który sankcjonuje używanie tych pojęć (trójki Gelfanda, najeżone przestrzenie Hilberta).

Są jeszcze w tej chwili takie modele, które słuszniej byłoby nazwać szkicami modeli, o których nie wiadomo,czy dadzą się ująć ściśle jako modele matematyczne. Chodzi tu o kwantową teorię pola w sformułowaniu, w którym używają jej fizycy dla przypadku pól oddziałujących. W modelu tym czyni się pewne założenia, o których wiadomo, że są sprzeczne.Nie jest

natomiast rzeczą jasną, czy ten szkic modelu da się kiedyś przedstawić w sposób całkowicie zadowalający pod względem logicznym, tak jak stało się na przykład z funkcją δ Diraca. Problem ten jest obecnie jednym z ważniejszych w fizyce teoretycznej.

Fizycy niemal z reguły pomijają milczeniem to, że wiele uwagi w swojej działalności poświęcają modelom. Zwykle powiada się: rozpatrzmy atom wodoru według mechaniki kwantowej, sugerując w ten sposób, iż rzeczywiście rozpatruje się atom wodoru. W istocie jest tak, że zajmujemy się modelem matematycznym atomu wodoru, a więc tworem myśli ludzkiej, proponowanym przez mechanikę kwantową. Dlaczego nikt nie mówi w ten sposób? Po pierwsze dlatego, że obywanie się bez zwrotu "model matematyczny" jest wygodne, a chociaż jest nieścisłe, nie prowadzi na ogół do pomyłek. Po drugie, przyjemniej jest robić sobie złudzenia, że zajmujemy się bezpośrednio obiektywną rzeczywistością, a nie tylko jej matematycznymi modelami. Fizycy, oczywiście, mają jak najlepsze chęci i chcą mówić o tej rzeczywistości, ale jedyną rozsądną drogą jest tu, jak wydaje się, budowanie modeli.

Warto jednak zdać sobie sprawę z tego, że na codzień fizycy teoretycy zajmują się modelami. Ta sprawa też czasem prowadzi do nieporozumień. Na przykład słyszy się często pytanie: czy istnieje promieniowanie grawitacyjne? Można tu spotkać się z nierozsądną odpowiedzią: jak to, przecież już Einstein dawno to udowodnił i zupełnie nie wiadomo, dlaczego amerykańscy fizycy starają się doświadczalnie promieniowanie to wykryć. Taka odpowiedź jest, oczywiście, nieporozumieniem. Mianowicie, Einstein zbadał problem promieniowania grawitacyjnego w ramach modelu proponowanego przez jego własną teorię. Okazało się, że pewne rozwiązania równań opisujących pole grawitacyjne są podobne do pewnych rozwiązań równań Maxwella, które, jak dobrze wiadomo na podstawie doświadczenia, opisują fale elektromagnetyczne. Natomiast nie ma pewności, czy einsteinowski model pola grawitacyjnego jest w pełni adekwatny, a zwłaszcza, czy jest w pełni prawdziwy we fragmen-

cie, który dotyczy promieniowania grawitacyjnego.Oczywiście, jeśli mamy teorię, która dobrze opisuje wiele różnych zjawisk, to jesteśmy skłonni sądzić, że inne przepowiednie tej teorii także zostaną doświadczalnie potwierdzone, ale wcale tak być nie musi.

Teraz wyjaśnia się sprawa, co rozumie się przez to,że jakaś teoria fizyczna może być uznana za prawdziwą lub fałszywą. Czasami czyta się lub słyszy zdanie, że ktoś obalił jakąś teorię, że np. Einstein obalił teorię Newtona.Jeśli zgodzić się, że główną treścią teorii fizycznych są modele,które w przybliżony sposób opisują rzeczywistość, to stwierdzenie powyższe nie ma wielkiego sensu. W najlepszym razie można podać modele, które będą lepiej opisywać zjawiska niż modele dotychczasowe; tak właśnie zdarzyło się z teorią Einsteina. Mianowicie, modele proponowane przez tę teorię są dokładniejsze niż modele proponowane przez Newtona, ale określenie, że Einstein obalił teorię Newtona nie jest słuszne. Modele newtonowskie są po dziś dzień stosowane i nic nie wskazuje na to, żeby miały przestać być stosowane.Dzieje się tak dlatego, że modele te dobrze opisują zjawiska w pewnym zakresie prędkości, mianowicie przy prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła.

Zdarza się czasami, że są dwa konkurencyjne modele, które mają ambicję opisywać ten sam krąg zjawisk,w tym samym przybliżeniu, i okazuje się, iż jeden z tych modeli daje wyniki zgodne z obserwacjami, drugi zaś nie. Wtedy jesteśmy skłonni stwierdzić, że ten pierwszy model jest dobry, a ten drugi zły, a nawet natychmiast go odrzucić.Takie przypadki są jednak raczej rzadkie. Znacznie częściej sytuacja jest taka, że mamy szereg modeli, które opisują rzeczywistość w pewnym zakresie zjawisk, lecz każdy w nieco innym.Wtedy możemy starać się o ulepszenie tych modeli, tzn. zastąpienie takimi, które mają szerszy zakres stosowalności.

Obecnie chyba żaden fizyk nie uważa istniejących teorii za ostateczne. Stwierdzenie to stosuje się zwłaszcza do mechaniki kwantowej i do teorii względności. Nikt nie sądzi,

że teorie te są ostatnim słowem. Wydaje się jednak rzeczą pewną, że nie ma powrotu. Wszyscy są przekonani o tym, że rozwój fizyki nie pójdzie w tym kierunku, aby trzeba było zarzucić mechanikę kwantową i powrócić w stronę modeli klasycznych. To jest niemożliwe po prostu dlatego, że modele klasyczne mają w porównaniu z kwantowymi ograniczony zakres stosowalności. Analogiczna uwaga dotyczy teorii względności. Ale nikt też nie sądzi, aby teoria ta nigdy nie miała być poprawiona, zastąpiona teorią szerszą, dokładniejszą, ogólniejszą.

W jaki sposób można by inaczej, bardziej poprawnie dzielić fizykę? Podziału tego można dokonywać ze względu na różne aspekty badanych zjawisk. Pierwszy nasuwający się podział to podział ze względu na podstawowe oddziaływania, które występują w badanych zjawiskach fizycznych. Wyróżniamy obecnie następujące oddziaływania lub, inaczej mówiąc, siły:

grawitacyjne,

elektromagnetyczne,

jądrowe { słabe / silne.

Oddziaływania te zostały wymienione w kolejności ich odkrywania. Siły grawitacyjne i elektromagnetyczne są, jak uważa większość fizyków, dobrze zbadane i zrozumiane. Znajomość sił jądrowych nie jest jeszcze najlepsza. Nie istnieje tu zadowalająca teoria, która potrafiłaby opisać wystarczająco szeroki krąg zjawisk związanych z tymi siłami. Być może, iż przedstawiony tu podział oddziaływań jądrowych nie jest właściwy. Rzecz jasna, niemal nigdy nie zdarza się, aby w pewnym zjawisku występował tylko jeden rodzaj sił. Przeważnie można jednak określić, który z wymienionych rodzajów decyduje, a często można pominąć inne oddziaływania. Na przykład rozpatrując zjawisko ruchu planet wokół Słońca stwierdzamy, że decydującą rolę odgrywają tutaj zjawiska grawitacyjne, a wszelkie inne można pominąć, gdyż ich wkład jest tu minimalny. Podobnie, gdy rozpatruje się strukturę atomu, wówczas decydującą rolę odgrywają oddziaływania elektromagnetyczne; oddzia-

ływanie grawitacyjne między jądrem a elektronami jest około 10^{40} razy mniejsze niż oddziaływanie elektromagnetyczne.

Drugi podział zjawisk opiera się na ich skali, liczbie biorących w nich udział składników elementarnych. Można zajmować się zjawiskami w skali mikroświata, tzn. pojedynczymi cząstkami elementarnymi: fotonami, elektronami, nukleonami i wszelkimi innymi, które zostały odkryte w ostatnich 20 latach. Można zajmować się jądrami atomowymi, atomami, jonami lub też cząsteczkami. Można też zajmować się materią w skali makroskopowej, np. tym skryptem, który składa się w przybliżeniu z 10^{24} rozmaitych cząsteczek. Następnie można zajmować się materią w skali astronomicznej, a więc planetami, gwiazdami, układami gwiazd. Wreszcie można zajmować się Wszechświatem jako całością. Odpowiednio do każdej z tych skal zjawisk buduje się oddzielne teorie.

Panuje przekonanie, że najbardziej podstawowe są teorie opisujące zjawiska mikroświata, a więc te, które opisują pojedyncze układy elementarne. Sądzi się, że teorie opisujące zjawiska makroskopowe powinny dać się wyprowadzić z teorii mikroskopowych przez uwzględnienie wielkiej liczby cząstek, które w tych zjawiskach biorą udział.

Trzeci podział, raczej mniej istotny niż poprzednie, dotyczy prędkości występujących ruchów. Okazuje się, że krytyczną prędkością, z którą należy porównywać wszelkie inne, jest prędkość światła c . Zjawiska, w których występują ruchy z z prędkościami dużo mniejszymi od niej, można opisywać w ramach modeli newtonowskich, natomiast zjawiska, w których występują prędkości znaczne w stosunku do c , wymagają opisu opartego na teorii względności. Opis zjawisk z małymi prędkościami, proponowany przez teorię względności, daje wyniki bardzo niewiele różniące się od opisu w ramach teorii Newtona. Często mówi się wobec tego, że teoria Newtona jest granicznym przypadkiem teorii względności.

Wreszcie czwarty podział, który wiąże się z drugim, dotyczy stosowalności metod klasycznych lub kwantowych. Niemal we wszystkich sytuacjach, kiedy zajmujemy się pojedynczymi o-

biektami mikroświata, musimy posługiwać się prawami mechaniki kwantowej. Natomiast wtedy, kiedy opisujemy układy złożone z dużej liczby tych obiektów, w większości przypadków możemy stosować teorie klasyczne. Prawa kwantowe są ogólniejsze; dokonując odpowiedniego przejścia granicznego, z praw kwantowych otrzymujemy prawa klasyczne.

Podziały, o których tu mowa, nie są zupełnie niezależne. Na przykład zjawisko promieniowania elektromagnetycznego jest z samej swojej natury zjawiskiem relatywistycznym, gdyż zaburzenia elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła. Wynika z tego, że najdokładniejsza teoria zjawisk, w których występują pojedyncze fotony, jest równocześnie kwantowa i relatywistyczna. Jest nią elektrodynamika kwantowa. Teoria ta, zbudowana w latach trzydziestych, dostarcza obecnie najdokładniejszych sprawdzianów ilościowych teorii względności. Właśnie częstym błędem tych, którzy starają się podważyć teorię względności, jest to, że zapominają, jak bogate i dokładne są przewidywania relatywistycznej kwantowej elektrodynamiki.

Weźmy jako przykład jeden z wyników elektrodynamiki kwantowej: wzór, który podaje energie poziomów atomu wodoru

$$E_{njl} = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2n^2}\,\frac{4n - 3j - 3/2}{2j+1} - \frac{8\alpha^3}{3\pi n^3}\,Q_{jl} + \dots\right),$$

$$Q_{jl} = \begin{cases} \ln\dfrac{m}{2\varepsilon_n} + \dfrac{19}{30} & \text{dla } l = 0, \\ \ln\dfrac{me^4}{2\hbar^2\varepsilon_n} + \dfrac{3}{8}\,\dfrac{C_{jl}}{2l+1} & \text{dla } l \neq 0, \end{cases}$$

$$C_{jl} = \begin{cases} \dfrac{1}{l+1}, & \text{gdy } j = l + \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{l}, & \text{gdy } j = l - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

We wzorach tych użyto następujących oznaczeń:

m - masa elektronu,

e - nabój elektronu,

$\hbar$ - stała Plancka,

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ - tzw. stała struktury subtelnej ($\alpha \cong \frac{1}{137}$),

ε_n - "średnie logarytmiczne rozmycie stanu n ".

Liczby n, j, l numerują różne poziomy; n oraz l przyjmują wartości całkowite, $n = 1,2,3,\ldots$; $l = -n,-n+1,\ldots,n-1$, n; przy danym zaś l liczba j przyjmuje dwie wartości połówkowe: $j = l + \frac{1}{2}$ albo $j = l - \frac{1}{2}$. Wielkość kolejnych wyrazów w nawiasie zależy przede wszystkim od potęgi, w której występuje stała struktury subtelnej α. Drugi wyraz jest rzędu 10^{-4}, trzeci zaś rzędu 10^{-6}. Następne wyrazy, w których występują wyższe potęgi, a które zostały w powyższym wzorze wykropkowane, są dużo mniejsze. Pierwszy wyraz w nawiasie został uzyskany w teorii nierelatywistycznej, drugi w relatywistycznej kwantowej teorii Diraca, trzeci w elektrodynamice kwantowej, a następne wykropkowane wyrazy w obu teoriach relatywistycznych. Każda nowa teoria kwantowa wniosła tu poprawkę w stosunku do poprzedniej. Okazuje się, że zgodność tego wzoru z doświadczeniem jest bardzo duża. Rozbieżności są rzędu 10^{-10}. To jest, oczywiście, olbrzymi sukces tej teorii.

Obecnie uważa się, iż elektrodynamika kwantowa jest najdokładniejszą teorią fizyczną. Trzeba pamiętać, że teoria ta opiera się na trzech filarach. Pierwszy filar to teoria elektromagnetyzmu Maxwella, drugi to teoria kwantów, a trzeci - teoria względności. Jeżeli usunie się jeden z nich, to cała ta wspaniale zgodna z doświadczeniem teoria po prostu zawali się.

Zdarzają się jeszcze takie prace, w których autorzy proponują teorię dającą inne niż einsteinowskie wyjaśnienie doświadczenia Michelsona-Morleya i innych prostych doświadczeń. Autorzy ci twierdzą na tej podstawie, że teorię względności można zastąpić ich własną. Istotnie, jest wiele teo-

rii wyjaśniających doświadczenia Michelsona-Morleya lub parę innych, ale nie wolno zapominać o tym, że jest bardzo dużo doświadczeń, których wyniki z wielką precyzją zależą od teorii względności. Warto pamiętać, że obowiązuje tu tak jak w medycynie zasada: przede wszystkim nie szkodzić. Jeżeli chce się zastąpić teorię względności jakąś inną teorią, to ta nowa teoria powinna przewidywać wyniki doświadczeń opisywanych za pomocą teorii względności, przynajmniej z taką samą precyzją. Nowa teoria powinna dawać wyniki ilościowe zgodne z pomiarami przynajmniej z taką samą dokładnością jak teoria dotychczasowa.

Wiadomo, że nie istnieje teoria, która opisywałaby wszystkie fakty związane z cząstkami elementarnymi. W tym przypadku udało się jednak skonstruować pewne modele częściowe. Dotyczy to między innymi reakcji między cząstkami elementarnymi. Fizycy nie dysponują modelem wystarczająco dobrym do opisu tych reakcji. Niemniej jednak istnieje dobrze opracowana ich kinematyka, tj. ta część teorii, która nie wymaga do opisu sił będących przyczyną reakcji. Jest rzeczą pewną, że ten model częściowy wejdzie do przyszłej "dobrej" teorii cząstek elementarnych. W opracowywaniu kinematyki cząstek elementarnych, która, oczywiście, jest oparta na teorii względności, brał udział warszawski fizyk Józef Werle [8].

Literatura

1. GAMOW G.: Mister Tompkins w Krainie Czarów. PWN, Warszawa 1960.
2. INFELD L.: Moje wspomnienia o Einsteinie. Iskry, Warszawa 1956.
3. JABŁOŃSKI A.: O modelach w fizyce. Post. Fiz. 20, 1969, s. 541-546.
4. PLEBAŃSKI J., RYTEŃ J.: Projections as observables. Acta Phys. Pol. 20, 1961, s. 765-773.
5. TRAUTMAN A.: Comparison of Newtonian and relativistic

theories of space-time. W: Perspectives in geometry and relativity. Ed. B. Hoffmann. Indiana University Press 1966.
6. TRAUTMAN A.: Galileusza ogólna teoria względności. Post. Fiz. 16, 1965 z. 19.
7. TRAUTMAN A.: Teoria względności. Post. Fiz. 17, 1966, s. 129.
8. WERLE J.: Relativistic theory of reactions (model independent methods). PWN, Warszawa 1966.

II. Czasoprzestrzeń Galileusza

Rozpatrując i analizując zjawiska, fizycy wyodrębniają w nich różne aspekty, będące przedmiotem rozważań rozmaitych działów fizyki. Ilustrowaliśmy to w poprzednim rozdziale na przykładzie lotu kuli armatniej. Są pewne aspekty wspólne dla wszystkich zjawisk przyrodniczych, a mianowicie te, które dotyczą stosunków czasowych i przestrzennych pomiędzy elementami materialnymi biorącymi udział w zjawisku. W związku z tym u podstaw niemal każdego modelu zjawisk fizycznych leży pewien model stosunków czasowych i przestrzennych, czyli czasoprzestrzeń. Buduje się ją drogą abstrakcji od tego, "co się dzieje", uwzględniając natomiast "kiedy i gdzie". Można rozpatrywać zjawiska zachodzące blisko siebie, w ograniczonym obszarze przestrzeni i czasu, albo we Wszechświecie jako całości. W związku z tym zachodzi potrzeba rozpatrywania różnych modeli czasoprzestrzeni.

Do czasu powstania ogólnej teorii względności przeważał pogląd, że własności czasu i przestrzeni są niezmienne i wszędzie jednakowe. Sądzono, że lokalne własności czasoprzestrzeni określają jej własności globalne, a model oparty na obserwacji zjawisk z naszego najbliższego otoczenia stosuje się do Wszechświata jako całości. Od czasów Einsteina wiadomo, że tak nie jest.

Inna jest czasoprzestrzeń fizyka jądrowego, a inna kosmo-

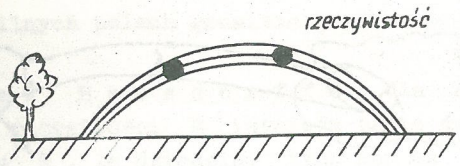
loga, gdyż ten ostatni musi np. uwzględniać zakrzywienie przestrzeni. Wydaje się, że nie ma natomiast potrzeby, przy rozpatrywaniu zjawisk w skali atomowej, a tym bardziej jądrowej, uwzględniać krzywiznę przestrzeni. A więc mówi się nie o jednej przestrzeni, lecz o wielu.

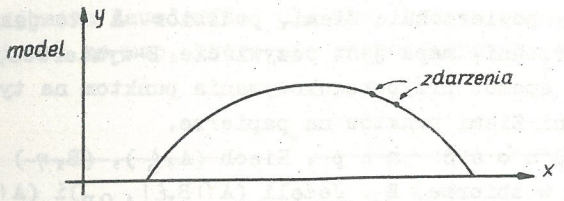
Pojęcie czasoprzestrzeni powstało razem z teorią względności. Przed Einsteinem mówiło się oddzielnie o czasie i o przestrzeni. Jednak jeśli zastanowić się przez chwilę, to widać, że w istocie rzeczy, już przed Einsteinem rozpatrywało się coś, co zgodnie z obecną terminologią powinniśmy nazwać czasoprzestrzenią. Przekonamy się niedługo, że wbrew temu, co często mówi się, czas i przestrzeń w mechanice Newtona nie są od siebie w pełni oddzielone. Używając języka współczesnej matematyki: czasoprzestrzeń newtonowska nie daje się w sposób naturalny przedstawić jako iloczyn kartezjański czasu i przestrzeni.

Co to jest czasoprzestrzeń? Czasoprzestrzeń jest to zbiór, którego elementy nazywa się zdarzeniami. Zgodnie z poprzednimi uwagami musimy ustalić, jaki jest związek pojęć występujących w modelu, z tym, co naprawdę obserwujemy. Zwłaszcza należy powiedzieć, czemu w rzeczywistości odpowiada matematyczne pojęcie punktu - zdarzenia. Pojęcie to otrzymamy przez abstrakcję tego, co nazywa się zdarzeniem w języku potocznym.

Wróćmy do przykładu z lotem kuli armatniej. Rozpatrzmy tutaj zdarzenie, które polega na tym, że kula np. uderza o ziemię. Stwierdzamy, że zjawisko to trwa pewien okres czasu i zajmuje pewien obszar przestrzeni. Dla naszych celów wygodniej jest jednak przypisać temu zjawisku pewną konkretną chwilę i pewne określone miejsce w przestrzeni. Możemy np. wziąć chwilę, która odpowiada zetknięciu się pewnego wybranego punktu na kuli z ziemią, oraz miejsce zetknięcia się tego punktu. Należy jeszcze zapomnieć o tym, co się właściwie dzieje, bo to nie jest dla nas istotne, i w ten sposób dochodzimy do pojęcia zdarzenia.

Podobnie można robić z dowolnym zdarzeniem, które ma miej-



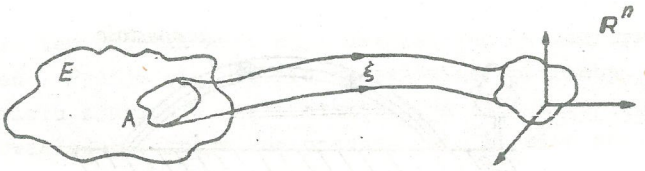


Rys. II.1

sce w czasie lotu kuli armatniej, jak to zostało schematycznie narysowane (rys. II.1). Widzimy więc, że pojęcie zdarzenia otrzymuje się przez abstrakcję idącą w trzech kierunkach: po pierwsze abstrahujemy od tego, co zaszło, po drugie od tego, jak długo to trwało, po trzecie od tego, ile to zajęło miejsca.

Teorie czasu i przestrzeni różnią się tym, że zakładają różne struktury matematyczne czasoprzestrzeni. Wszystkie poważniejsze teorie mają jednak pewną cechę wspólną, mianowicie zakładają, że czasoprzestrzeń jest czterowymiarową rozmaitością różniczkową. Aby wyjaśnić, czym jest rozmaitość różniczkowa, podamy kilka definicji matematycznych.

M a p a . Niech E będzie pewnym zbiorem (później przez E będziemy oznaczać czasoprzestrzeń), A zaś podzbiorem zbioru E : $A \subset E$. Niech ξ będzie odwzorowaniem zbioru A na pewien podzbiór otwarty n-wymiarowej przestrzeni arytmetycznej $\mathbf{R}^n$ (rys. II.2). Zażądamy ponadto, aby ξ było odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym. Parę (A, ξ) nazywa się



Rys. II.2

mapą, A dziedziną mapy, ξ zaś układem współrzędnych. Pojęcie mapy odpowiada temu, czym jest mapa w geografii. Zbiór E jest wtedy powierzchnią Ziemi, podzbiór A to jakiś kawałek tej powierzchni, mapa jest oczywiście 2-wymiarowa, odwzorowanie ξ to sposób przyporządkowywania punktom na tym kawałku powierzchni Ziemi punktów na papierze.

Z g o d n o ś ć m a p . Niech (A,ξ), (B,η) będą dwiema mapami w zbiorze E . Jeżeli $(A\cap B,\xi|_{A\cap B})$ i $(A\cap B,\eta|_{A\cap B})$ są mapami (inaczej mówiąc, $\xi(A\cap B)$ i $\eta(A\cap B)$ są zbiorami otwartymi), a ponadto odwzorowania $\xi\circ\eta^{-1}|_{\eta(A\cap B)}$ oraz $\eta\circ\xi^{-1}|_{\xi(A\cap B)}$ są nieskończenie wiele razy różniczkowalne, to mówi się, że mapy są zgodne, a dokładniej: C^∞ - zgodne.

W języku geografii zgodność map znaczy to, że miasta położone blisko siebie na jednej mapie muszą być także położone blisko siebie na drugiej oraz rzeki gładko "płynące" na jednej mapie muszą być też gładkie na drugiej.

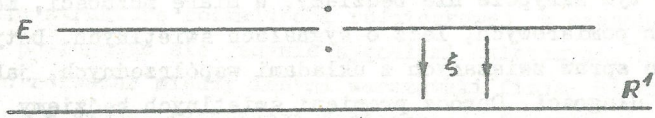
A t l a s . Atlasem nazywa się zbiór parami zgodnych map, których dziedziny pokrywają zbiór E . Ta nazwa też wzięła się z geografii.

R o z m a i t o ś ć r ó ż n i c z k o w a . Rozmaitością różniczkową klasy C^∞ nazywa się zbiór E wraz z maksymalnym atlasem (tzn. takim, do którego nie można dodać nowych map bez naruszenia zgodności).

Zwykle przyjmuje się, że rozmaitość ma pewien atlas przeliczalny (atlas maksymalny z reguły nie jest przeliczalny). W fizyce przyjmuje się ponadto, że czasoprzestrzeń E spełnia aksjomat Hausdorffa, chociaż słyszy się zdanie, że w pewnych

przypadkach w silnych polach grawitacyjnych aksjomat ten nie jest spełniony.

A k s j o m a t H a u s d o r f f a : dla każdej pary różnych punktów rozmaitości E istnieją takie dwie mapy należące do atlasu E , że dziedziny tych map są rozłączne i każda z nich zawiera po jednym punkcie pary. Okazuje się, że nie wszystkie rozmaitości różniczkowe spełniają ten aksjomat. Weźmy np. rozmaitość złożoną z dwóch półprostych bez początku i dwu punktów, w której mapami są rzuty na prostą obrazującą R^1 (jak na rys. II.3). Nietrudno wtedy sprawdzić, że zbiór taki jest rzeczywiście rozmaitością, ale nie spełnia aksjomatu Hausdorffa, dla dwu bowiem punktów poza półprostymi nie ma map, które nie zachodziłyby na siebie.



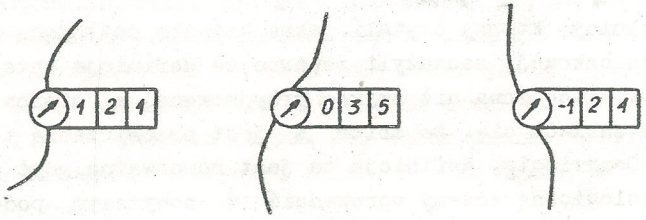
Rys. II.3

Czytelnicy, którzy czytali jakąś książkę dotyczącą geometrii różniczkowej, zauważyli zapewne,że definicja tutaj podana jest nieco inna niż zwykle przyjmowane, a mianowicie z góry nie zakłada się, że zbiór E jest przestrzenią topologiczną. Oczywiście, definicja ta jest równoważna,gdyż strukturę topologiczną możemy wprowadzić w powyższym podejściu żądając, aby zbiór E miał najsłabszą topologię,przy której układy współrzędnych są jeszcze ciągłe.

Podsumowując, założyliśmy, że czasoprzestrzeń jest 4-wymiarową rozmaitością różniczkową klasy C^∞ z przeliczalnym atlasem, spełniającą aksjomat Hausdorffa. Od tej pory symbolem E będziemy oznaczać taką właśnie czasoprzestrzeń.

Mówiąc o układach odniesienia fizycy do niedawna posługiwali się pojęciami takimi jak sztaby, sztywne pręty pomiaro-

we oraz zegary. Sytuacja pod tym względem zmieniła się w ostatnich latach, szczególnie jeśli chodzi o pręty pomiarowe. Stanowią one, ze względu na atomową strukturę materii, układy fizycznie bardzo skomplikowane. Pręty takie podlegają wielu wpływom zewnętrznym : ciśnieniu, temperaturze, różnym polom tak, że w rzeczywistości nigdy nie są sztywne. Z tego powodu słynny platynowo-irydowy wzorzec metra w Sèvres uległ "detronizacji". Obecnie oficjalnie przyjęta definicja metra jest inna niż przed paru laty, a mianowicie opiera się na długości fal pewnego promieniowania atomowego. Stało się tak oczywiście dlatego, że promieniowanie elektromagnetyczne ma stosunkowo bardzo prostą strukturę, w małym stopniu zależy od warunków zewnętrznych, a co za tym idzie - łatwo zapewnić stałość długości fali takiego promieniowania. Wobec tego również w tym skrypcie nie będziemy, w miarę możności, mówić o prętach pomiarowych, lecz o sygnałach świetlnych. Dotyczy to zarówno spraw związanych z układami współrzędnych, jak i pomiarów długości. Oprócz promieni świetlnych będziemy posługiwać się idealnymi zegarami, które mogą być realizowane, powiedzmy, jako "zegary jądrowe" - mało czułe na wpływy zewnętrzne.



Rys. II.4

W jaki sposób realizować te układy współrzędnych, o których mowa w definicji rozmaitości różniczkowej? Otóż matematycznemu pojęciu układów współrzędnych odpowiada pojęcie układów odniesienia. Układy odniesienia możemy sobie wyobrazić w ten sposób, że całą przestrzeń wypełniamy zegarami, które mają wyryte trzy liczby charakteryzujące ich położe-

nie. Zegary w tym przypadku nie muszą być idealne,mogą nawet chodzić wręcz źle, byleby tylko położone blisko siebie zegary chodziły podobnie. Analogicznie blisko siebie położone zegary powinny mieć wyryte na sobie zbliżone liczby.

Warto tu zwrócić uwagę na to, że tak wprowadzone układy odniesienia nie mają żadnych własności metrycznych. Wprowadzenie struktury metrycznej to sprawa całkiem inna. Aby ją wprowadzić, musimy rozważyć pewne określone zjawiska fizyczne, takie jak rozchodzenie się światła i "dobre" zegary.

Warto zastanowić się nad problemem,jaki byłby najprostszy sposób wprowadzenia struktury rozmaitości różniczkowej bez odwoływania się do pojęć, które występują w zagadnieniach metrycznych, jak prętów pomiarowych lub - w naszym przypadku - zegarów. Konkretniej, jest rzeczą interesującą, czy można wprowadzić strukturę rozmaitości różniczkowej w czasoprzestrzeni, posługując się jedynie sygnałami świetlnymi. Zagadnienie to rozważał między innymi warszawski fizyk Stanisław Woronowicz w swojej dysertacji doktorskiej. Pokazał on, że istotnie przy pomocy prostych obserwacji sygnałów świetlnych można wprowadzić w czasoprzestrzeni strukturę rozmaitości topologicznej. Natomiast ani jemu, ani nikomu innemu nie udało się na tej podstawie wprowadzić struktury różniczkowej.

Słyszy się czasami zdanie, że czterowymiarowość jest związana z teorią względności, a przed powstaniem tej teorii świat był trójwymiarowy. Oczywiście tak nie jest. Czasoprzestrzeń była czterowymiarowa także przed Einsteinem.Aby uzmysłowić sobie, co ta czterowymiarowość oznacza, przypomnijmy, że pisząc list powinniśmy w nagłówku oznaczyć miejsce,w którym się znajdujemy, oraz podać datę, czyli czas zajścia zdarzenia polegającego na pisaniu listu.Tu tkwią owe cztery liczby: wysokość nad poziomem morza (często czyni się to pisząc kartki z okolic górskich), szerokość i długość geograficzną (robią to marynarze) oraz czas (można go oznaczać jedną liczbą, np. liczyć w sekundach od narodzenia Chrystusa). Natomiast przestrzeń także w teorii względności jest trójwymiarowa,tyle że podział czasoprzestrzeni na przestrzeń oraz

czas odbywa się tu nieco inaczej niż w fizyce newtonowskiej.

Rozmaitość różniczkowa jest pojęciem bardzo ogólnym, a czasoprzestrzeń, o której zakładaliśmy tylko, że jest rozmaitością różniczkową, byłaby zbyt ubogim modelem. Tylko niewielką liczbę zjawisk bylibyśmy w stanie opisać przy jej pomocy. W związku z tym musimy w naszej czasoprzestrzeni wprowadzić pewne dodatkowe struktury geometryczne. Okazuje się, że strukturą wspólną dla wszystkich teorii czasu i przestrzeni jest tzw. koneksja afiniczna, zwana inaczej koneksją liniową albo przeniesieniem równoległym. Będzie o niej mowa nieco później. Obecnie zajmiemy się modelami bardziej specjalnymi, a mianowicie takimi, które dają podstawy opisu zjawisk z pominięciem oddziaływań grawitacyjnych.

Chcąc wyjaśnić, dlaczego pomijamy zjawiska związane z grawitacją, musimy sobie zdać sprawę z wyjątkowego charakteru oddziaływań grawitacyjnych. Otóż grawitacja ma pewne cechy wyjątkowe. Najważniejsze jest tutaj to, że ruch ciała w polu grawitacyjnym nie zależy od cech tego ciała, lecz tylko od cech samego pola. Wiemy na przykład, że w pobliżu powierzchni Ziemi wszystkie ciała spadają na nią z jednakowym przyspieszeniem, które zwykło się oznaczać g. Inaczej jest z pozostałymi oddziaływaniami, np. z polem elektromagnetycznym. Wiemy, że istnieją ciała elektrycznie obojętne, na które pole to nie działa. Poza tym możemy działanie tego pola zupełnie wyeliminować, budując odpowiednie ekrany, które będą unicestwiały jego wpływ. Nie ma natomiast żadnych ekranów grawitacyjnych i to jest druga cecha wyróżniająca pole grawitacyjne. Przy bardziej dokładnej analizie okazuje się nawet, że oddziaływania grawitacyjne można (ze względu właśnie na te szczególne własności) sprowadzić do pewnych własności czasoprzestrzeni. Jednak uwzględnienie tych oddziaływań powoduje dużą komplikację struktury geometrycznej czasoprzestrzeni, tak że na razie będziemy je pomijać w naszych rozważaniach.

Przy tych założeniach obowiązuje I zasada dynamiki, która mówi, że:

1° istnieje wyróżniona klasa ruchów zwanych swobodnymi,

2° istnieją układy odniesienia, względem których ruchy swobodne odbywają się bez przyspieszeń.

Zwykle do punktu 1° dodaje się komentarz, który powiada, że ruchy swobodne mają miejsce wtedy, kiedy na ciała nie działają żadne wpływy zewnętrzne. Punkt 2° zwykle formułuje się nieco inaczej, a mianowicie powiada się, że ruchy swobodne odbywają się prostoliniowo i jednostajnie względem pewnych układów odniesienia zwanych inercjalnymi. Okazuje się, że sformułowania te są sobie równoważne, jeśli czasoprzestrzeni nadać taką strukturę geometryczną, żeby miało w niej sens pojęcie prostoliniowości i jednostajności. Strukturą taką jest struktura przestrzeni afinicznej.

P r z e s t r z e ń a f i n i c z n a . Przestrzenią afiniczną nazywa się parę (E, V), gdzie E jest pewnym zbiorem, V zaś przestrzenią wektorową, oraz określone jest odwzorowanie $"+" : E \times V \longrightarrow E$ spełniające pewne dodatkowe warunki. Otóż V działa w E jako (abelowa) grupa przekształceń, tzn. dla dowolnych elementów $p \in E$ oraz $u, v \in V$ zachodzi

$$(p + u) + v = p + (u + v)$$

oraz, gdy przez 0 będziemy oznaczać element zerowy przestrzeni V, wówczas

$$p + 0 = p \quad \text{dla każdego} \quad p \in E .$$

Ponadto żąda się, żeby grupa V działała w E tranzytywnie i swobodnie. Swoboda znaczy to, że równość $p + u = p$ powinna pociągać za sobą $u = 0$. Natomiast tranzytywność to żądanie, aby dla dowolnych $p, q \in E$ istniał taki $u \in V$, że zachodzi $p + u = q$; łatwo można przekonać się, że ze swobody wynika, iż jeśli taki wektor istnieje, to tylko jeden i nazywa się go różnicą punktów q oraz p, tzn. pisze się $u = q - p$.

W y m i a r . Wymiarem przestrzeni afinicznej (E, V) nazywa się liczbę równą wymiarowi przestrzeni wektorowej V .

R e p e r . Reperem albo bazą przestrzeni afinicznej (E, V) nazywa się parę $(\mathcal{O}, e)$, gdzie $\mathcal{O} \in E$, natomiast $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jest bazą n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V .

Każdy punkt $p \in E$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $p = \mathcal{O} + u(p)$, gdzie $u(p) \in V$. Z kolei możemy rozłożyć wektor $u(p)$ względem bazy e . Dostaniemy w ten sposób

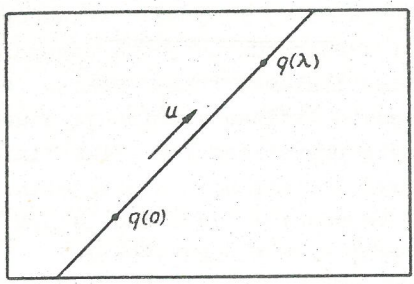
$$p = \mathcal{O} + \xi^i(p)\, e_i .$$

Przy zapisie tego wzoru skorzystaliśmy z konwencji sumacyjnej Einsteina: jeżeli jakiś wskaźnik powtarza się raz u dołu, a drugi raz u góry, to znaczy, że powinniśmy wysumować po nim w całym zakresie, w jakim zmienia się. Korzystając z tego wzoru widzimy, że otrzymaliśmy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\xi : E \to \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$. Widać, że para (E, ξ) jest mapą, której dziedziną jest cała przestrzeń E . Niech atlas zbioru E składa się z tej jednej mapy. W ten sposób E staje się rozmaitością różniczkową, której wymiar pokrywa się z wymiarem przestrzeni afinicznej, (E, V).

Ponieważ czasoprzestrzeń była rozmaitością 4-wymiarową, więc od tej pory będziemy przyjmować, że wymiar przestrzeni afinicznej (E, V) (a więc i rozmaitość E) wynosi 4.

P r o s t a (rys. II.5). Prostą w E nazywa się zbiór punktów postaci $\{\lambda u + p : \lambda \in \mathbb{R}^1\}$, gdzie p jest pewnym ustalonym punktem E , u zaś ustalonym wektorem z V . Wektor u nazywa się wektorem kierunkowym tej prostej; jest on wyznaczony z dokładnością do czynnika. Punkt p także nie jest jednoznacznie wyznaczony przez prostą; zamiast niego można wziąć inny element tej prostej. Równanie parametryczne prostej ma postać

$$q(\lambda) = u\lambda + q(0).$$



Rys. II.5

Jeżeli oznaczymy $x^i = \xi^i \circ q$, to

$$x^i(\lambda) = u^i\lambda + x^i(0),$$

gdzie u^i są współrzędnymi wektora u względem bazy e ,to znaczy $u = u^i e_i$.

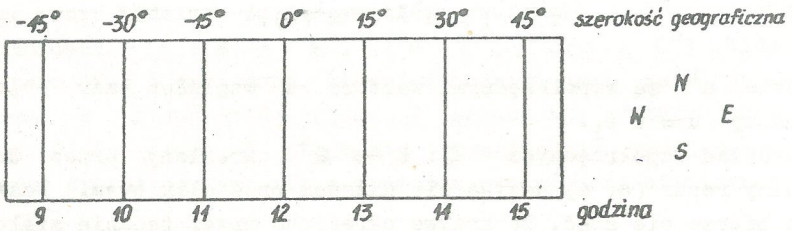
Układ współrzędnych $\xi : E \longrightarrow \mathbf{R}^4$ określany przez dowolny reper $(\mathcal{O}, e)$ nazywa się układem prostoliniowym. Nazwa ta bierze się stąd, że krzywe określone przez żądanie stałości trzech współrzędnych są prostymi przechodzącymi przez początek układu (tj. punkt $\mathcal{O}$). Na przykład żądając, aby ξ^1, ξ^2 i ξ^3 były stałe, otrzymujemy prostą, której wektorem kierunkowym jest e_4 . Oczywiście, prócz takich układów współrzędnych można wprowadzać inne, którymi zajmiemy się dopiero w rozdziale VII.

Z równania parametrycznego prostej widzimy, że jest ona dana przez liniowe związki między współrzędnymi (gdy wyeliminujemy parametr λ). Przypominając sobie, o czym była mowa w I zasadzie dynamiki, dochodzimy do wniosku, że to właśnie proste są, fachowo mówiąc, liniami świata ruchów swobodnych.

Co się stanie, jeśli dokonamy zamiany bazy $e \longmapsto e'$? Wów-

czas nastąpi, oczywiście, liniowa transformacja współrzędnych. Wśród tych współrzędnych jedną powinniśmy nazwać czasem. Dokonując tej liniowej transformacji otrzymamy nowy "czas", który będzie liniową kombinacją starego czasu i starych współrzędnych przestrzennych. Taka liniowa transformacja czasu może wydawać się nie do przyjęcia. Postaramy się podać przykład, że nawet w życiu codziennym dokonujemy podobnych (liniowych) transformacji czasu.

Dobrze wiadomo, że na Ziemi istnieją strefy czasu. Można sobie wyobrazić umowę międzynarodową (abstrahując od jej niepraktyczności), na mocy której strefy czasu zostałyby zastąpione przez ciągły rozkład czasu. Wtedy posunąwszy się na przykład na wschód o 1° szerokości geograficznej musielibyśmy posunąć zegarki do przodu o 4 minuty.



Rys. II.6

Weźmy teraz pewien niewielki obszar na powierzchni Ziemi i aproksymujmy go płaszczyzną, jak to zostało zrobione na rysunku II.6. Wyobraźmy sobie samolot, na którym zegarki chodzą według czasu GMT. Pilot tego samolotu stwierdzi, że jego czas wyraża się przez czas ziemski i szerokość geograficzną wzorem:

$$\text{czas pilota (w godz.)} = \text{czas na Ziemi (w godz.)} + -\frac{1}{15}\,\text{szerokości geograficznej (w stopniach)}.$$

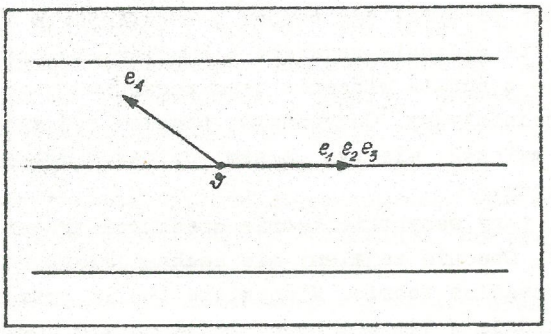
Widać, że związek między czasem pilota (czasem GMT) a czasem na Ziemi i szerokością geograficzną jest liniowy. Jeśliby

samolot ten poruszał się ruchem prostoliniowym i jednostajnym z punktu widzenia zegarków ziemskich, to pilot stwierdziłby, że z punktu widzenia jego zegarków jego lot jest również jednostajny. Oczywiście, powodem tej zgodności jest to, że związek między czasem pilota a czasem ziemskim jest liniowy.

Do tej pory wszystkie teorie czasoprzestrzeni były ze sobą zgodne. Obecnie zajmiemy się cechami, które różnią od siebie poszczególne teorie. Mianowicie teorie przedrelatywistyczne zakładają w tym momencie, że wśród wielu możliwych czasów (określonych na przykład jako czwarta współrzędna zdarzenia względem pewnego reperu) istnieje jeden, który jest szczególnie dogodny do opisu zjawisk fizycznych i nazywa się go czasem absolutnym. Żeby mieć taki czas w każdym miejscu Wszechświata, trzeba zsynchronizować ze sobą wszystkie możliwe zegary. Jak to można zrobić? Nad tym przed Einsteinem mało zastanawiano się, a ci, którzy o tym myśleli, sądzili zapewne, że można to zrobić przy pomocy rozchodzących się błyskawicznie sygnałów, których natury nie umiano bliżej sprecyzować. Od 1675 roku, kiedy to Olaf Römer zmierzył prędkość światła obserwując zaćmienia księżyców Jowisza, wiedziano, że sygnały świetlne mają skończoną prędkość, ale wydawało się, że np. zjawiska grawitacyjne rozchodzą się natychmiastowo.

Co to jest czas absolutny? Gdy mamy w naszej czasoprzestrzeni pewien reper $(\mathcal{S}, e)$, to możemy czwartą współrzędną zdarzenia nazwać czasem względem tej bazy. Stwierdzenie, że istnieje czas absolutny, odpowiada wyróżnieniu jednego spośród tych czasów. Nietrudno określić równoczesność zdarzeń względem reperu $(\mathcal{S}, e)$: zdarzenia p oraz q $(p, q \in E)$ nazwiemy zdarzeniami równoczesnymi względem reperu $(\mathcal{Q}, e)$, jeżeli $\xi^4(p) = \xi^4(q)$. Podzbiór E, będący zbiorem zdarzeń równoczesnych, jest hiperpłaszczyzną w E. Różnym wartościom współrzędnej ξ^4 odpowiadają różne hiperpłaszczyzny wzajemnie do siebie równoległe.

Stwierdzenie, że istnieje czas absolutny, odpowiada temu,

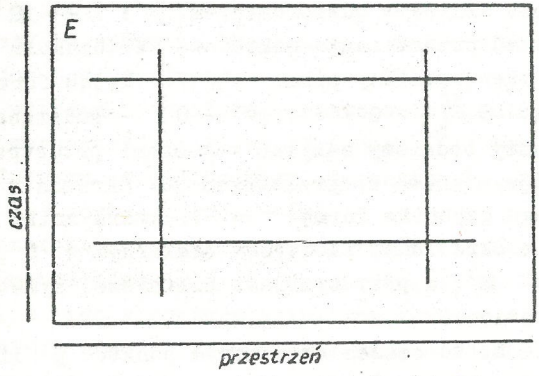


Rys. II.7

że te hiperpłaszczyzny istnieją w czasoprzestrzeni obiektywnie, tzn. są pewną dodatkową strukturą geometryczną niezależną od tego, czy zajmujemy się pewnymi reperami, czy nie. Hiperpłaszczyzny te są zbiorami zdarzeń absolutnie równoczesnych, czyli stałego czasu absolutnego, który przyjęło się oznaczać literą t . Oczywiście, istnienie czasu absolutnego wyróżnia pewne repery, a mianowicie takie, których czwarta współrzędna pokrywa się z czasem absolutnym, tj. dla każdego zdarzenia $p \in E$ mamy $\xi^4(p)=t(p)$. Wtedy wektory bazy e_1, e_2, e_3 leżą na hiperpłaszczyźnie zdarzeń równoczesnych z ϑ tak jak zaznaczono na rys. II.7. Wektor e_4 celowo nie jest narysowany prostopadle do tej płaszczyzny, ponieważ pojęcie prostopadłości nie zostało tu wprowadzone. Gdybyśmy takie pojęcie wprowadzili, musielibyśmy wyróżnić takie proste, które przecinałyby hiperpłaszczyzny zdarzeń równoczesnych pod kątem prostym. Można by wtedy powiedzieć, że punkty materialne, dla których te proste są liniami świata, bezwzględnie spoczywają.

Zgodnie z zasadą względności Galileusza stwierdzenie takie nie ma sensu, ponieważ wszystkie układy inercjalne są jednakowo dobre do opisu zjawisk fizycznych. Pojęcie absolutnego spoczynku miało natomiast sens w teorii czasu i prze-

strzeni Arystotelesa. Idąc za tą teorią, tzn. wprowadzając w czasoprzestrzeni pojęcie wektorów prostopadłych do hiperpłaszczyzn zdarzeń równoczesnych, moglibyśmy przyporządkować każdemu punktowi czasoprzestrzeni pewien punkt na jednej (dowolnie wybranej) hiperpłaszczyźnie zdarzeń równoczesnych poruszając się po prostych prostopadłych do tych płaszczyzn. Czasoprzestrzeń stałaby się iloczynem kartezjańskim czasu i przestrzeni jak to zostało wyobrażone na rys. II.8.



Rys. II.8

Podamy przykład ilustrujący różnicę między teorią Arystotelesa a teorią Galileusza. Według obydwóch teorii można stwierdzić, ile czasu upłynęło między bitwą pod Grunwaldem a powstaniem teorii względności. Zgodnie z Galileuszem nie można powiedzieć, jaka jest odległość przestrzenna tych zdarzeń, bo, żeby to zrobić, musielibyśmy powiedzieć, względem jakiego układu odniesienia mierzymy tę odległość. Układ związany z Ziemią jest niedobry, gdyż nie jest to układ inercjalny, a odległości mierzone w różnych układach inercjalnych też będą różne. Natomiast zgodnie z Arystotelesem wśród układów inercjalnych istnieje taki, który "spoczywa", i właśnie względem niego powinniśmy mierzyć tę odległość, która teraz będzie miała znaczenie absolutne.

Czas absolutny nie stanowi o całej strukturze czasoprzestrzeni Galileusza. Stwierdza się jeszcze, że hiperpłaszczyzny zdarzeń równoczesnych są przestrzeniami euklidesowymi. Pozwala to mierzyć odległość między zdarzeniami równoczesnymi.

Obecnie w sposób bardziej matematyczny sformułujemy, jaką strukturę geometryczną ma c z a s o p r z e s t r z e ń G a l i l e u s z a . Mianowicie czasoprzestrzenią Galileusza nazwiemy czwórkę (E, V, τ, h). (E, V) jest tutaj czterowymiarową przestrzenią afiniczną. τ jest pewną formą w V, to znaczy τ jest liniowym odwzorowaniem $\tau : V \to \mathbb{R}^1$. Przestrzeń form nad przestrzenią wektorową V oznacza się zwykle V^*, a więc będziemy pisać $\tau \in V^*$. Mając formę τ, możemy określić $S \stackrel{df}{=} \{ v \in V : \tau(v) = 0 \}$ - podprzestrzeń V, której elementy będziemy nazywać wektorami przestrzennymi. Odwrotnie, trójwymiarowa podprzestrzeń S określa z dokładnością do stałego czynnika formę τ w V, która znika na S. h jest dodatnio określonym iloczynem skalarnym w S, to jest $h : S \times S \to \mathbb{R}^1$, a przy tym jest biliniowe, symetryczne i dodatnio określone.

Niech $\mathcal{O} \in E$, to czasem absolutnym punktu p liczonym od punktu $\mathcal{O}$ jest $t(p) = (p - \mathcal{O})$. Dodając do p dowolny wektor przestrzenny, otrzymujemy element E równoczesny z p; hiperpłaszczyzną zdarzeń równoczesnych z p jest zbiór $p + S = \{ p + s : s \in S \}$. Iloczyn skalarny h służy do mierzenia odległości zdarzeń ze sobą równoczesnych. Niech p oraz q będą zdarzeniami równoczesnymi, tj. $(p - q) \in S$. Wtedy odległością zdarzeń p, q nazwiemy liczbę $d(p, q) = \sqrt{h(p - q, p - q)}$. Z tego widać, że jest sens mówić jedynie o odległości zdarzeń równoczesnych, gdyż różnica zdarzeń nierównoczesnych nie jest wektorem przestrzennym, a więc nie można na niej określić kwadratu skalarnego $h(p - q, p - q)$.

Możemy obecnie sformułować pojęcie inercjalnych układów odniesienia, co odpowiada w naszym modelu matematycznym wyróżnieniu pewnej klasy układów współrzędnych. Prostoliniowe układy współrzędnych w E są wyróżnione ze względu na strukturę afiniczną czasoprzestrzeni, każdemu takiemu układowi

współrzędnych odpowiada pewien reper. Inercjalne układy współrzędnych będą stanowić węższą klasę, a będą im odpowiadać szczególne repery nazywane inercjalnymi.

Inercjalnym reperem w E będziemy nazywać reper (ϑ, e), taki, że baza e przestrzeni wektorowej V ma następujące własności:

1) $\tau(e_4) = 1$,

2) $\tau(e_\alpha) = 0$ dla $\alpha = 1, 2, 3$,

3) $h(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$

$\delta_{\alpha\beta}$ jest tu symbolem Kroneckera, tzn. równa się zeru, gdy $\alpha \neq \beta$, lub jedności, gdy $\alpha = \beta$. Wektory e_α są przestrzenne, wzajemnie do siebie prostopadłe, o długości równej 1. Dzięki warunkom 1) i 2) współrzędna ξ^4 jest równa czasowi absolutnemu t, liczonemu od punktu ϑ, tzn. dla każdego $p \in E$ jest $\xi^4(p) = t(p)$.

Przekształceniami Galileusza nazwiemy takie wzajemnie jednoznaczne odwzorowania E na siebie, które zachowują jej strukturę, a więc strukturę afiniczną oraz τ i h. Dokładniej, będziemy mieć do czynienia z parą wzajemnie jednoznacznych odwzorowań $f : E \to E$, $\varphi : V \to V$, które mają następujące własności:

1) φ jest odwzorowaniem liniowym,

2) gdy $p \in E$, $u \in V$, wówczas $f(p + u) = f(p) + \varphi(u)$,

3) $\tau(\varphi(u)) = \tau(u)$ dla $u \in V$,

4) gdy $v, w \in S$, wówczas $h(v, w) = h(\varphi(v), \varphi(w))$.

Znajdziemy teraz dokładną postać przekształceń Galileusza. Rozłóżmy punkt $p \in E$ względem reperu (ϑ, e):

$$p = \xi^\alpha e_\alpha + t e_4 + \vartheta .$$

Po wykonaniu przekształcenia Galileusza

$$f(p) = \xi^{\alpha'} e_\alpha + t' e_4 + \vartheta .$$

Poszukamy związku między współrzędnymi $\xi^{\alpha'}$, t' a ξ^α, t. Biorąc pod uwagę, że e jest bazą V, mamy

$$\varphi(e_\alpha) = R_\alpha^\beta e_\beta + Q_\alpha e_4 ,$$
$$\varphi(e_4) = V^\alpha e_\alpha + P e_4 .$$

Z warunku 3) wynika, że: po pierwsze $Q_\alpha = 0$, a po drugie $P = 1$. Własność 4) pociąga za sobą ortogonalność macierzy R_β^α, to znaczy

$$R_\beta^\alpha R_\delta^\gamma \delta_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\delta} .$$

Następnie posłużymy się warunkiem 2), uwzględniając liniowość φ :

$$f(p) = f(\xi^\alpha e_\alpha + te_4 + \vartheta) = \varphi(\xi^\alpha e_\alpha + te_4) + f(\vartheta) =$$

$$= \xi^\alpha R_\alpha^\beta e_\beta + tV^\beta e_\beta + te_4 + (f(\vartheta) - \vartheta) + \vartheta .$$

$f(\vartheta) - \vartheta$ jest stałym wektorem,

$$f(\vartheta) - \vartheta = a^\alpha e_\alpha + t_0 e_4 ,$$

a zatem

$$f(p) = (\xi^\alpha R_\alpha^\beta + tV^\beta + a^\beta)e_\beta + (t + t_0)e_4 + \vartheta .$$

Ostatecznie przekształcenia Galileusza mają postać

$$\begin{cases} \xi^{\alpha'} = R_\beta^\alpha \xi^\beta + V^\alpha t + a^\alpha , \\ t' = t + t_0 . \end{cases}$$

Mając geometryczny model czasoprzestrzeni, możemy sformułować w jego języku prawa mechaniki punktów materialnych, bryły sztywnej i ośrodków ciągłych. Przykładowo, równanie ruchów swobodnych będzie miało postać

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0,$$

gdzie t jest czasem absolutnym. Okazuje się wtedy, że przekształcenia Galileusza odwzorowują rozwiązania równań mecha-

niki w rozwiązania tych samych równań; krótko mówiąc, przekształcenia Galileusza są symetriami w mechanice. Często wypowiada się zasadę względności Galileusza mówiąc,że wszystkie układy inercjalne są jednakowo dobre do opisu zjawisk mechanicznych. Nie znaczy to oczywiście, że każde oddzielne zjawisko fizyczne przebiega jednakowo we wszystkich układach inercjalnych. Na przykład zjawisko spoczynku punktu materialnego w pewnym inercjalnym układzie odniesienia, w innym układzie inercjalnym polega na prostoliniowym i jednostajnym ruchu względem tego układu. Jest to zgodne z zasadą względności Galileusza, albowiem zarówno ruchy prostoliniowy i jednostajny, jak i spoczynek względem pewnego inercjalnego układu odniesienia są rozwiązaniami równania ruchów swobodnych, o którym była mowa wyżej.

Historycznie pierwsze w pełni geometryczne ujęcie mechaniki zostało dokonane przez E. Cartana [2]. Później wielu innych autorów zajmowało się tym zagadnieniem [3, 4, 6]. Polacy również mają tu swój wkład. Geometryczne sformułowanie mechaniki ośrodków ciągłych podał Julian Bonder [1, 5].

Literatura

1. BONDER J.: Sur l'invariance du système différentiel de la dynamique de gaz réels, envisagé dans l'espace-temps affine, sans métrique. (Application du principe de Galilée). Arch. Mech. stos. 16, 1964, z. 2.
2. CARTAN E.: Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. École Norm. Sup. 40, 1923, s. 325; 41, 1924, s 1.
3. TRAUTMAN A.: Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time. W: Perspectives in geometry and relativity. Ed. B. Hoffmann, Indiana University Press, Bloomington 1966.
4. KILMISTER C.: The principle of mechanics. J. Math. Mec 12, 1963, s.1.

5. BONDER J.: Tensorowe niemetryczne ujęcie równań dynamiki gazów. W: Metody geometryczne w fizyce i technice.WNT,Warszawa 1968.
6. TRAUTMAN A.:Sur la théorie newtonienne de la gravitation. Compt. Rend. 257, 1963, s. 617.

III. Próby wykrycia eteru

Rozpatrując model czasoprzestrzeni Galileusza uwzględnialiśmy dotychczas tylko zjawiska mechaniczne. Powstaje pytanie: co robić ze zjawiskami elektromagnetycznymi, zwłaszcza z optycznymi? Świadomie wyodrębniliśmy tu zjawiska optyczne, gdyż historycznie odegrały wyróżnioną rolę [6, 7].

Rozpatrzmy rozchodzenie się światła w próżni. Wiadomo,że odbywa się ono prostoliniowo, a więc tak jak ruchy swobodne punktów materialnych. Stałość wartości prędkości światła stanowi jednak istotną różnicę. Dokładniej, w mechanice dane początkowe, którymi są: położenie w chwili początkowej $\vec{r}(0)$ i prędkość w chwili początkowej $\dot{\vec{r}}(0)$, wyznaczają położenie punktu materialnego $\vec{r}(t)$ w dowolnej chwili t. Natomiast w optyce wystarczy podać $\vec{r}(0)$ oraz kierunek prędkości początkowej, aby znać położenie punktu świetlnego $\vec{r}(t)$ w chwili t.

Chcąc sformułować prawa optyki w ramach modelu Galileusza, należy wyróżnić układy odniesienia, względem których prędkość światła wynosi c . Jak wiadomo,prędkość światła występuje w równaniach Maxwella, rządzących zjawiskami elektromagnetycznymi. Zastanówmy się, czym jest wartość prędkości względem pewnego układu inercjalnego.

Jeżeli krzywa $t \longmapsto x(t) \in E$ opisuje linię świata punktu materialnego lub promienia świetlnego, to dx/dt nazywa się czteroprędkością tego punktu materialnego (promienia świetlnego). W każdym inercjalnym układzie odniesienia współrzędne wektora czteroprędkości są $(dx^i/dt) = (d\vec{r}/dt, 1)$.Wobec tego $dx/dt - e_4$ jest wektorem przestrzennym (prędkością w zwykłym sensie) i wobec tego możemy mierzyć jego długość

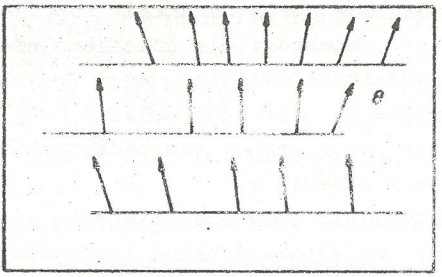
$\left|\frac{dx}{dt} - e_4\right|_h$ w sensie iloczynu skalarnego h w przestrzeni S . Niech u oznacza czteroprędkość pewnego promienia świetlnego. Wyróżnione będą te układy inercjalne, dla których $|u - e_4|_h = c$ zachodzi dla dowolnego promienia świetlnego. Ponieważ promienie świetlne mogą rozchodzić się we wszystkich kierunkach, nietrudno pokazać, że istnieje tylko jeden taki wektor e_4 . Wektor ten będziemy nazywali e t e r e m i oznaczali literą e .

Należy tu podkreślić podwójne znaczenie słowa eter. Po pierwsze, wektor e wyznacza układ inercjalny (zwany układem eteru), względem którego prędkość światła wynosi c , a co za tym idzie, w którym spełnione są równania Maxwella. Po drugie, mianem eteru oznaczano hipotetyczny ośrodek materialny, spoczywający w tym układzie; zjawiska elektromagnetyczne miały być przejawem drgań tego ośrodka. Zauważmy, że istnienie materialnego eteru pociąga za sobą istnienie eteru geometrycznego, ale nie przeciwnie. Można sobie wyobrazić teorię fizyczną, według której nie istniałby ośrodek materialny, ale mimo to istniałby układ inercjalny, względem którego prędkość światła wynosiłaby c .

Położywszy większy nacisk na materialny aspekt istnienia eteru nietrudno dojść do pewnego uogólnienia. Mianowicie, można sobie wyobrazić eter, który nie spoczywa w żadnym układzie inercjalnym. Jego prędkość zmienia się przy przechodzeniu od jednego punktu czasoprzestrzeni do innego. Z matematycznego punktu widzenia mamy wtedy do czynienia z polem wektorowym $E \ni p \longrightarrow e(p) \in V$, które jest polem czteroprędkości eteru materialnego. W ten sposób w każdym punkcie czasoprzestrzeni mamy pewien lokalny układ inercjalny, którego czwarty wektor pokrywa się z e (rys. III.1).

Teorie, w których wektor e jest zmienny, noszą nazwę teorii eteru unoszonego lub wleczonego. Nazwa ta bierze się stąd, że z pewnych względów wydawało się rzeczą rozsądną przyjąć, iż poruszające się ciała ważkie częściowo albo nawet całkowicie unoszą ze sobą otaczający je eter. Teorie, w których

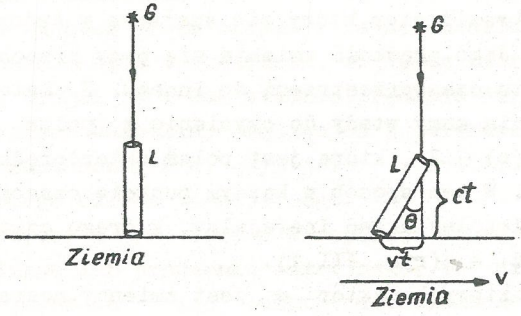
e jest stałym wektorem, noszą nazwę teorii eteru absolutnego.



Rys. III.1

Zajmiemy się teraz doświadczalnymi próbami wykrycia eteru i stwierdzenia jego natury.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że argumentem na rzecz istnienia eteru absolutnego jest zjawisko aberracji. Przypo-



Rys. III.2

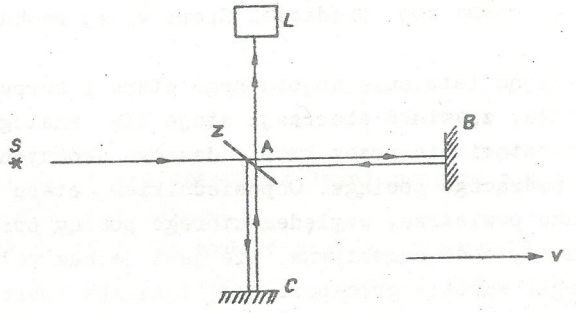
mnijmy, na czym ono polega. Za pomocą lunety L obserwujemy światło gwiazdy G znajdującej się w zenicie.Na rys. III.2a jest zilustrowany przypadek Ziemi pozostającej w spoczynku w stosunku do hipotetycznego eteru. Na rys. III.2b jest wyobrażona Ziemia poruszająca się w stosunku do eteru z prędkością v . Aby zaobserwować światło gwiazdy G, obserwator powinie pochylić lunetę o kąt θ taki, że $tg\,\theta = V/c$. Dokonując odpowiednich obserwacji, zmierzono kąt 2θ, o jaki należy zmienić położenie lunety co pół roku, aby móc stale obserwować w niej gwiazdę. Okazało się, że wynikająca z przytoczonego wzoru prędkość v jest w przybliżeniu równa 30 km/s, a więc równa się prędkości Ziemi w jej ruchu dookoła Słońca.

Jeśli przyjąć istnienie absolutnego eteru i korpuskularną naturę światła, zjawisko aberracji staje się analogiczne do zjawiska pozostawiania przez krople deszczu ukośnych śladów na szybach pędzącego pociągu. Odpowiednikiem eteru jest w tym przypadku powietrze, względem którego pociąg porusza się.

Analogia ta, choć sugestywna, nie jest jednak pełna,i jak będziemy mogli wkrótce przekonać się, zjawiska aberracji można także wytłumaczyć obywając się bez pojęcia eteru.

Fizeau wykonywał doświadczenia dotyczące prędkości światła w poruszających się ośrodkach. Puszczał on mianowicie światło przez rury, w których szybko poruszała się woda. Raz czynił to zgodnie z kierunkiem ruchu wody, a innym razem przeciwnie, i porównywał wartość prędkości światła w tych dwóch przypadkach. Okazało się, że wystąpiła pewna różnica prędkości. Przemawia to za tym, że eter jest przynajmniej częściowo unoszony przez wodę. Ilościowo dobre wyniki otrzymuje się, jeżeli zgodnie z Fresnelem przyjąć, że współczynnik wleczenia eteru przez ośrodek materialny o współczynniku załamania światła n wynosi $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$. Wobec tego dla ciał optycznie nieczynnych $\alpha = 0$, co jest w zgodzie ze zjawiskiem aberracji, natomiast dla ciał optycznie czynnych $\alpha > 0$, czyli ciała te będą częściowo unosić eter.

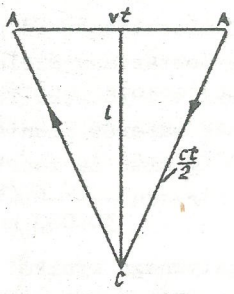
Dokładniejsza analiza pokazuje, że zjawiska optyczne opisywane przez wzory zawierające wielkości pierwszego rzędu w $\beta = v/c$ dadzą łatwo wytłumaczyć się na podstawie wielu teorii. Na przykład, teoria względności daje takie same przewidywania, jeśli chodzi o tego typu efekty, do których między innymi zalicza się zmiana prędkości światła w poruszającej się wodzie (doświadczenia Fizeau) i zjawisko aberracji. W związku z tym zaczęto zastanawiać się nad efektami drugiego rzędu w β, które mogłyby przemówić na korzyść teorii eteru.



Rys. III.3

Odpowiednie doświadczenie, zaproponowanen jeszcze przez Maxwella, wykonali w 1881 roku Michelson i Morley [4]. Promień światła ze źródła S pada na półprzezroczystą płytkę Z, częściowo odbija się, a częściowo przenika, trafiając do luster B i C. Po odbiciu światło trafia do L, gdzie obserwuje się prążki interferencyjne (rys. III.3). Przyrząd ustawiono tak, że ramię AB jest równoległe do kierunku prędkości Ziemi względem Słońca (a więc w przybliżeniu względem eteru, jeśli układ związany ze Słońcem dobrze przybliża inercjalny układ eteru). Czas potrzebny na przebycie drogi ABA wynosi

$$\frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}.$$



Rys. III.4

Rozważając trójkąt ACA (rys. III.4), dochodzimy do wniosku, że czas t potrzebny na przebycie drogi ACA wynosi

$$\frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Różnica czasów wyniesie

$$\Delta = \frac{2}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - l_2 \right)$$

Jeśli obrócić interferometr o 90°, to jako różnicę czasów przejścia otrzymuje się

$$\Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Obserwacje Michelsona i Morleya polegały na badaniu, czy przy takim obrocie układ prążków interferencyjnych ulega przesunięciu, tzn. sprowadzały się do pomiaru różnicy

$$\Delta - \Delta' = \frac{2(l_1 + l_2)}{c\sqrt{1 - \beta^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right) \cong \frac{l_1 + l_2}{c}\,\beta^2.$$

Z dużą dokładnością i niezależnie od pory roku otrzymano $\Delta - \Delta' = 0$. Pomiary te powtarzano wielokrotnie [5]. Najdokładniejszy wynik otrzymał w 1958 roku Townes wraz ze współpracownikami [1] za pomocą maserów amoniakalnych. Z jego pomiarów wynikało $\beta < 10^{-7}$, mimo że teoria eteru absolutnego przewiduje dla β wartość rzędu $\frac{30\ \text{km/s}}{300000\ \text{km/s}} = 10^{-4}$.

Celem wyjaśnienia negatywnego wyniku doświadczeń Michelsona i Morleya w 1892 roku Fitzgerald i Lorentz niezależnie od siebie zaproponowali, aby przyjąć, że ciała poruszające się względem eteru ulegają skróceniu w kierunku ruchu w stosunku $\sqrt{1 - \beta^2}$. Istotnie, jeśli przyjąć hipotezę Fitzgeralda-Lorentza, to

$$\Delta = \Delta' = \frac{2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}(l_{10} - l_{20}),$$

gdzie symbolami l_{10} i l_{20} oznaczyliśmy długości ramion interferometru w spoczynku względem eteru. Michelson i Morley używali interferometru o niemal równych długościach ramion, $l_{10} \approx l_{20}$, co tłumaczy bardzo niewielką bezwzględną wartość przesunięcia Δ.

Modyfikacją doświadczenia Michelsona i Morleya, zmierzającą do sprawdzenia hipotezy Fitzgeralda-Lorentza, zajęli się Kennedy i Thorndike [3]. Użyli interferometru o różnych długościach ramion, $l = l_{10} >> l_{20}$. W tym przypadku, przyjmując hipotezę skrócenia długości

$$\Delta(\beta) \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,\beta^2\right).$$

Kennedy i Thorndike porównywali $\Delta(\beta)$ w tym samym układzie, w różnych porach dnia i roku. Jeśliby istniał eter i

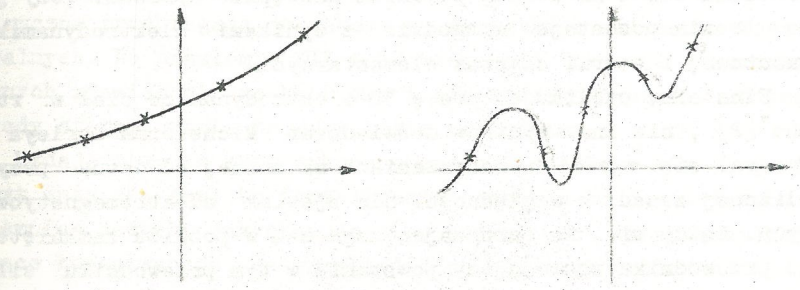
hipoteza skrócenia byłaby słuszna, to na skutek ruchu Ziemi wielkość $\Delta(\beta)$ powinna zależeć od pory pomiaru, czego nie stwierdzono. Zatem hipoteza Lorentza-Fitzgeralda nie wystarcza do wyjaśnienia doświadczeń Kennedy'ego i Thorndike'a.

Stosunkowo najtrudniejszą do obalenia próbą ratowania fizyki Newtona była powstała w 1908 roku, a więc już po sformułowaniu teorii względności, teoria emisyjna Ritza. Teoria ta stanowi unowocześnioną wersję teorii korpuskularnej i orzeka, że prędkość światła w próżni wynosi c względem jego źródła. Inaczej mówiąc, każde źródło ma własny eter. Teoria ta tłumaczy zarówno zjawisko aberracji, jak i wyniki doświadczeń Michelsona-Morleya.

Różni zwolennicy tej teorii różnie odpowiadali na pytanie, co dzieje się ze światłem odbitym od lustra poruszającego się względem źródła? Sam Ritz twierdził, że prędkość światła jest nadal równa c względem pierwotnego źródła.

Teorię tę trudno jest pogodzić ze współczesnymi kwantowymi poglądami na mechanizm emisji światła. Ponadto, teoria emisyjna pozostaje w sprzeczności z obserwacjami efektu Dopplera u gwiazd podwójnych.

Powstaje pytanie: czy zostały już wyczerpane wszystkie warianty pogodzenia elektrodynamiki z modelem Galileusza? Czy nie ma modeli, różnych od teorii względności, w ramach których można by uprawiać elektrodynamikę? Na te pytania niełatwo dać kategoryczną odpowiedź.

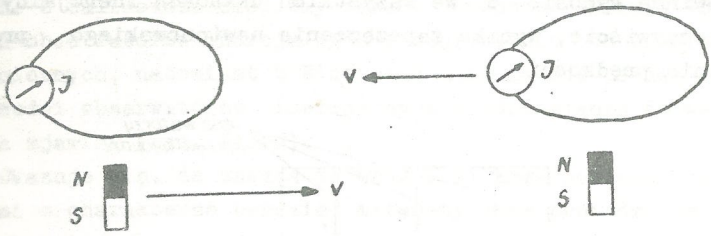


Rys. III.5

Zilustrujemy tę myśl przykładem z opracowywania wyników pomiarów. Przypuśćmy, że fizyk dostaje ciąg liczb, które odkłada na wykresie. Ktoś, któ jest zorientowany w podobnych sprawach, zauważy, że punkty na wykresie układają się na krzywej wykładniczej, a stosując metody analizy pomiarów stwierdzi, że rzeczywiście krzywa wykładnicza jest dobrym opisem wyników pomiarowych (rys. III.5a).Ale ktoś inny powie, że honoruje wyłącznie krzywe algebraiczne i z tego powodu nie podoba mu się analiza doświadczenia wykonana przez jego poprzednika. Przecież, skoro mamy skończoną liczbę punktów doświadczalnych, to można do nich dobrać odpowiedniego stopnia wielomian, który będzie dobrym opisem wyników pomiarowych (rys. III.5b).

Istnieje luźna analogia tej sytuacji do stosunku teorii fizycznych do doświadczeń. Skończoną liczbę faktów doświadczalnych można zawsze wyjaśnić za pomocą wielu teorii.Jednym z kryteriów przyjęcia jednej z nich jest jej prostota.Innym, z pewnością ważniejszym, kryterium jest to, czy można ją zastosować do budowy modeli innych doświadczeń.Właśnie istotną cechą teorii względności jest to, że tłumaczy ona nie tylko doświadczenia Michelsona-Morleya, Kennedy'ego-Thorndike'a , aberracji i innych klasycznych doświadczeń optycznych, lecz jest podstawą innych teorii fizycznych, opisujących znacznie bogatszą klasę zjawisk fizycznych. W związku z tym ktoś, kto podaje teorię tłumaczącą wyniki doświadczeń optycznych z przełomu XIX i XX wieku, powinien następnie sprawdzić,czy jego teoria pozostaje w zgodzie z wynikami elektrodynamiki kwantowej i teorii cząstek elementarnych.

Einstein, publikując pracę "O elektrodynamice ciał w. ruchu"[2] , nie znał wyników doświadczeń Michelsona-Morleya . Opierał się w swoich rozważaniach na znanej od dawna przybliżonej zasadzie względności dla zjawisk elektromagnetycznych. Każdy wie, że poruszając magnesem w pobliżu zamkniętego przewodnika spowodujemy powstanie w tym przewodniku siły elektromotorycznej, a co za tym idzie, przepływ prądu.Kierunek i wielkość prądu nie ulegną zmianie, jeśli zamiast poru-



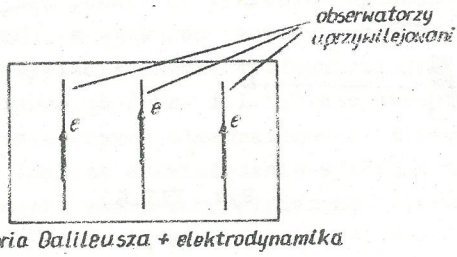
Rys. III.6

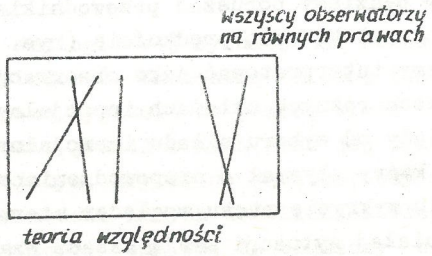
szać magnesem będziemy poruszać przewodnikiem w przeciwnym kierunku, lecz z taką samą prędkością (rys. III.6). Te dwie sytuacje możemy interpretować jako obserwacje tego samego zjawiska w dwóch różnych układach inercjalnych. Wynik obserwacji nie zależy od wyboru układu inercjalnego.

Einstein, który słyszał o niepowodzeniach doświadczeń mających na celu wykrycie ruchu względem eteru, podał jako wyjście z zaistniałej sytuacji swoją zasadę względności. Brzmi ona: zjawiska mechaniczne i elektromagnetyczne przebiegają jednakowo we wszystkich układach inercjalnych. Zasada ta jest uogólnieniem zasady względności Galileusza, polegającym na tym, że podlegają jej nie tylko zjawiska mechaniczne, ale także elektromagnetyczne. Współcześnie zasadę tę formułuje się trochę inaczej, mianowicie powiada się, że wszystkie zjawiska fizyczne przebiegają jednakowo we wszystkich układach inercjalnych. Na przełomie XIX i XX wieku nie znano w zasadzie innych zjawisk niż mechaniczne i elektromagnetyczne, toteż wtedy sformułowania te były sobie równoważne.

Wydaje się, iż krok wykonany przez Einsteina nie jest zbyt duży, że jest to formalizacja znanych od dawna faktów. Niemniej jednak, jak okazuje się, pociąga on za sobą daleko idące konsekwencje. Na przykład, z zasady względności wynika, że równania Maxwella powinny mieć taką samą postać we wszystkich układach inercjalnych, a co za tym idzie prędkość świa-

tła powinna wynosić c we wszystkich układach inercjalnych. Stąd, oczywiście, wynika zaprzeczenie newtonowskiego prawa dodawania prędkości.





Rys. III.7

Do wypowiedzenia zasady względności używa się często pojęcia obserwatorów inercjalnych, które to pojęcie jest pewnego rodzaju antropomorfizacją pojęcia układów inercjalnych. Rzeczywiście, obok reperu $(\vartheta, e_1, e_2, e_3, e_4)$ wygodnie używać obserwatora, którego linia świata jest styczna do wektora e_4. Obserwator ten jest wyposażony w zegarek odmierzający jednostkowy okres czasu podczas przejścia obserwatora z punktu ϑ do punktu $\vartheta + e_4$. Ponadto, obserwator ma "wycelowane" wzdłuż wektorów e_1, e_2, e_3 teodolity i za ich pomocą może mierzyć kąty, pod jakimi padają na niego promienie świetlne.

Zasada względności Einsteina mówi, że zjawiska fizyczne przebiegają jednakowo dla wszystkich obserwatorów inercjal-

nych. U Galileusza mieliśmy zasadę równouprawnienia wszystkich obserwatorów inercjalnych w odniesieniu do zjawisk mechanicznych, natomiast u Einsteina mamy zasadę pełnej równoważności obserwatorów inercjalnych w odniesieniu do wszystkich zjawisk (rys. III.7).

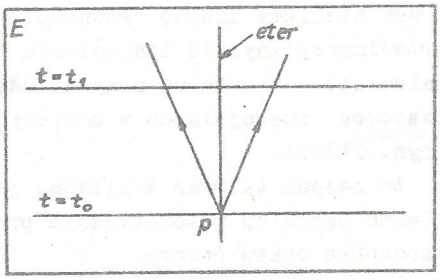
Okazuje się, że zasada ta wraz z kilkoma jeszcze założeniami o charakterze bardziej matematycznym prowadzi do istotnych zmian w sposobie opisu świata.

Literatura

1. CEDARHOLM J.P. et al.: New experimental tests of special relativity. Physical Rev. Letters 1, 1958, s. 342-343.
2. EINSTEIN A.: Zur Elektrodynamik der bewegter Körper. Ann. Phys. 17, 1905, s. 891-921.
3. KENNEDY R.J., THORNDIKE E.M.: Experimental establishment of the relativity of time. Phys. Rev. 42,1932,s. 400-418.
4. MICHELSON A.A.: Light waves and their uses. University of Chicago Press, Chicago 1903.
5. MILLER D.C.: Ether-drift experiments and the determination of the absolute rotation of the Earth. Revs.Mod.Phys. 5, 1933, s. 203-242.
6. TONNELAT M.A.: Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité. Masson, Paris 1959.
7. WHITTAKER E.: A history of the theories of aether and electricity. Philosophical Library, New York 1954.

IV. PRZEWIDYWANIA TEORII WZGLĘDNOŚCI ORAZ ICH DOŚWIADCZALNE SPRAWDZENIE

Przyjęcie zasady względności wymaga rezygnacji z czasu absolutnego. Przypuśćmy bowiem, że istnieje czas absolutny, a prędkość światła nie zależy od ruchu źródła.



Rys. IV.1

Niech punkt $p \in E$ leży na hiperpłaszczyźnie zdarzeń równoczesnych, określonej równością $t = t_0$. Z punktu tego wysyłamy w przeciwnych kierunkach dwa promienie świetlne, których linie świata są półprostymi o wspólnym początku p. Przez środek odcinka łączącego punkty przecięcia tych półprostych z hiperpłaszczyzną $t = t_1$, gdzie $t_1 > t_0$, i przez punkt p poprowadzimy prostą (rys. IV.1). Prosta ta jest wybrana kanonicznie, gdyż nie zależy od ruchu źródła (nie zależy też od kierunku wysłania promieni świetlnych na mocy izotropowości przestrzeni). O punkcie materialnym, dla którego ta prosta jest linią świata, naturalne jest powiedzenie: punkt ten spoczywa. W ten sposób doszliśmy do pojęcia absolutnego spoczynku (eteru), co jest zaprzeczeniem zasady względności.

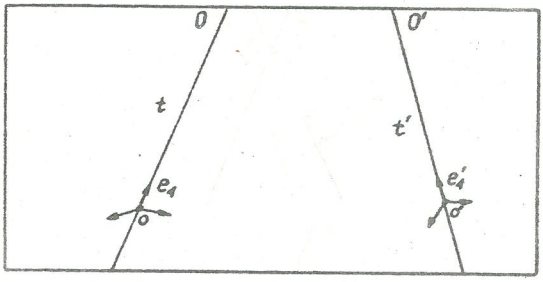
Od tej pory nie będziemy więc zakładali, że w czasoprzestrzeni E jest wprowadzone pojęcie czasu absolutnego. Pozostaniemy przy czasoprzestrzeni afinicznej implikowanej przez I zasadę Newtona.

Każdy obserwator inercjalny ma swój zegar. Czas zdarzenia p względem obserwatora O, któremu odpowiada reper (v, e_α, e_4) (gdzie $\alpha = 1, 2, 3$), jest określony przez

$$p = t(p)e_4 + \xi^{\alpha}(p)e_{\alpha} + \vartheta ,$$

natomiast czas tego samego zdarzenia p względem obserwatora O′ jest zdefiniowany równością

$$p = t'(p)e'_4 + \xi'^{\alpha}(p)e'_{\alpha} + \vartheta' .$$

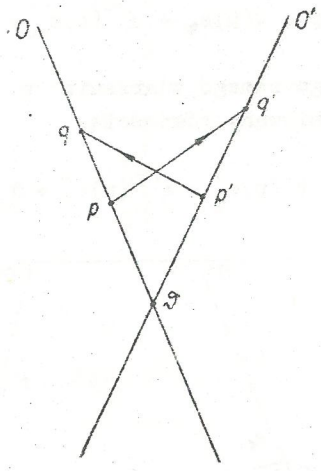


Rys. IV.2

Czasy t, t′ są związane z bazami i nie mają żadnych własności metrycznych (rys. IV.2). Powstaje pytanie:w jaki sposób zsynchronizować zegary różnych obserwatorów, lub inaczej, co w tym modelu znaczy, że obserwatorzy O i O′ posługują się jednakowymi zegarami?

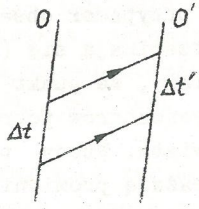
Rozpatrzmy najpierw przypadek obserwatorów inercjalnych, których linie świata przecinają się (rys. IV.3). Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że punkt zaczepienia reperów używanych przez tych obserwatorów pokrywa się z punktem ϑ przecięcia ich linii świata. Wtedy $t(\vartheta) = t'(\vartheta) = 0$. Odcinki pq′ , p′q wyobrażają promienie świetlne.Jeśli $t(p) = t'(p')$, to skoro obserwatorzy są na równych prawach,a zegary ich są jednakowe, powinno zachodzić $t(q) = t'(q')$. Należy podkreślić, że wnioskowanie to nie byłoby słuszne, gdyby przyjąć hipotezę eteru, a co za tym idzie, uzależnić prędkość światła od układu odniesienia.

Kolejny rysunek (rys. IV. 4) obrazuje zagadnienie zgodno-



Rys. IV.3

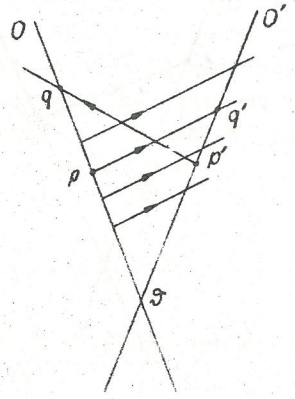
ści zegarów w przypadku równoległych linii świata obserwatorów O, O´ . Teraz warunek zgodności zegarów oznacza, że powinna zachodzić równość $\Delta t = \Delta t'$. Oczywiście, w tym przypadku nie ma dobrego sposobu na określenie wspólnego początku liczenia czasu.



Rys. IV.4

Jeżeli linie świata obserwatorów O, O´ są wichrowate, to procesu uzgodnienia zegarów dokonujemy w dwóch krokach; ist-

nieje wtedy linia świata (obserwatora O'') przecinająca jedną z linii danych a równoległa do drugiej. Od tej pory będziemy zakładać, że zegary wszystkich obserwatorów inercjalnych zostały zsynchronizowane w wyżej podany sposób.

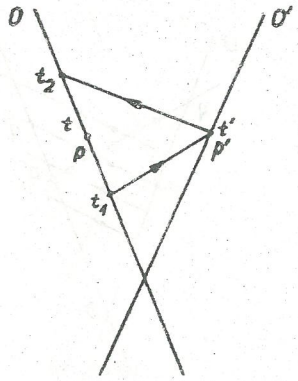


Rys. IV.5

Względność równoczesności. Ponieważ odrzuciliśmy pojęcie czasu absolutnego, musimy także zrezygnować z absolutnej równoczesności. Dwa zdarzenia, uznane za równoczesne przez jednego obserwatora, na ogół nie będą równoczesne dla innego. Zanalizujemy tę sprawę w prostym przypadku [1].

Linie świata obserwatorów O, O' przecinają się. Obserwator O wysyła co pewien czas sygnał świetlny w kierunku obserwatora O' (rys. IV.5). Trójkąty, których wierzchołkami są punkty wysłania sygnałów przez obserwatora O, punkty przyjęcia tych sygnałów przez O' i wspólny punkt ϑ, są do siebie podobne. Stąd wynika, że współczynnik α w równaniu $t'(q') = \alpha\, t(p)$ nie zależy od p - punktu wysłania sygnału świetlnego przez O. Analogicznie mamy $t(q) = \alpha\, t'(p')$.

Wybierając zdarzenia p, p' tak, żeby $t(p) = t'(p')$, wnioskujemy, posługując się warunkiem zgodności zegarów, że $\alpha = \alpha'$. Oczywiście, $\alpha \geq 1$.



Rys. IV.6

Przypuśćmy teraz, że obserwator O wysyła w chwili t_1 sygnał świetlny w kierunku obserwatora O', który odbiera go w punkcie p', określonym czasem t'. Obserwator O' za pomocą lustra kieruje ten sygnał w kierunku O, który odnotuje jego otrzymanie w chwili t_2 (rys. IV.6).

Z poprzednich rozważań wiemy, że $t' = \alpha t_1$, $t_2 = \alpha t'$. Jakie zdarzenie na swojej linii świata uzna za równoczesne ze zdarzeniem p' obserwator O? Z punktu widzenia obserwatora O rozsądnie jest uznać, że zdarzenie p takie, iż

$$t = t(p) = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})t'$$

jest równoczesne ze zdarzeniem p'. Łatwo zauważyć, że $t > t'$. Efekt ten nosi nazwę dylatacji czasu.

Obserwator O skomentuje ten fakt mówiąc, że zegar obserwatora O′ opóźnia się. Obserwator O′ nie zgodzi się uznać zdarzenia p za równoczesne ze zdarzeniem p′. Proponujemy czytelnikowi jako ćwiczenie znaleźć zdarzenie na linii świata obserwatora O, które O′ uzna za równoczesne ze zdarzeniem p′, oraz pokazać, że z punktu widzenia O′ zegar obserwatora O opóźnia się w tym samym stosunku. Stwierdzamy, że zegary poruszające się idą wolniej niż zegary spoczywające i że każdy obserwator może zauważyć to zjawisko.

Obliczmy współczynnik α. Niech O′ porusza się względem O z prędkością V. W chwili $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ odległość O′ od O wyniesie

$$Vt = \frac{1}{2}V(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)Vt_1 .$$

Taką samą odległość światło pokona w czasie $\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)t_1$, a więc

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha^2)Vt_1 = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)ct_1 .$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

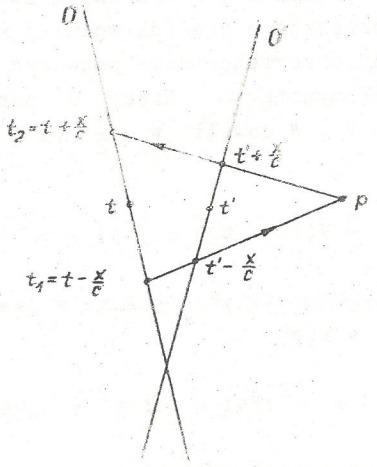
$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \text{ gdzie } \beta = \frac{V}{c} .$$

Na tej podstawie obliczamy, że wielkość dylatacji czasu wyraża się wzorem

$$t' = \sqrt{1 - \beta^2}\,t .$$

Okazuje się, że wzór ten jest słuszny również dla przypadku obserwatorów inercjalnych, których linie świata nie przecinają się, jeżeli zastąpimy t, t′ odpowiednio przez Δt, $\Delta t'$. W szczególnym przypadku, gdy linie świata obserwatorów O, O′ są równoległe, tzn. gdy obserwatorzy ci spoczywają względem siebie, mamy $\Delta t' = \Delta t$, czyli brak dylatacji czasu.

P o m i a r y o d l e g ł o ś c i i p r z e k s z t a ł c e n i a L o r e n t z a . Niech p oznacza zdarzenie, którego położenie i moment zajścia chcą określić obserwatorzy O, O´ . Dla uproszczenia założymy, że p znajduje się w jednej płaszczyźnie z liniami świata obserwatorów.



Rys. IV.7

Rysunek IV.7 wyobraża radarową metodę mierzenia odległości. W chwili t_1 obserwator O wypuszcza sygnał świetlny, który mija O´, "odbija się" w p, ponownie mija O´ i wreszcie w chwili t_2 wraca do O. Obserwator O określi odległość zajścia p równością

$$x = \frac{1}{2} c(t_2 - t_1) ,$$

natomiast chwilę zajścia p równością

$$t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2) .$$

Analogicznie postąpi O'. Na skutek powyższego czasy spotkania promieni świetlnych z obserwatorami będą miały wartości, które zaznaczono na rys. IV.7. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami mamy

$$t' - \frac{x'}{c} = \alpha(t - \frac{x}{c}),$$

$$t + \frac{x}{c} = \alpha(t' + \frac{x'}{c}).$$

Z tego łatwo wynika, że $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$. Wyrażenie postaci $c^2t^2 - x^2$ nie zależy od wyboru układu odniesienia. Mówimy, że wyrażenie to jest niezmiennikiem w szczególnej teorii względności. Następnie wyrazimy t' i x' przez t oraz x :

$$t' = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})t - \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{\alpha})\frac{x}{c},$$

$$x' = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})x - \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{\alpha})ct.$$

Podstawiając zależność α od prędkości V obserwatora O' względem obserwatora O, otrzymujemy

$$t' = \frac{t - (Vx/c^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Wzory te noszą nazwę szczególnych przekształceń Lorentza. Pierwszy podał je Lorentz [3] jako przekształcenia, które nie zmieniają postaci równań Maxwella, jednak traktował je w sposób czysto formalny. Dopiero Einstein przypisał występującym tu wielkościom sens fizyczny, tzn. zinterpretował je jako odpowiadające wskazaniom dobrych zegarów i poprawnym pomiarom odległości.

Omówimy teraz kilka wniosków wynikających ze szczególnych przekształceń Lorentza.

G r a n i c a n i e r e l a t y w i s t y c z n a. Przypuśćmy, że obserwator O' porusza się z prędkością V, małą

w stosunku do prędkości światła c , tzn. $\beta << 1$. Przekształcenia Lorentza redukują się wtedy do

$$t' = t, \quad x' = x - Vt \ .$$

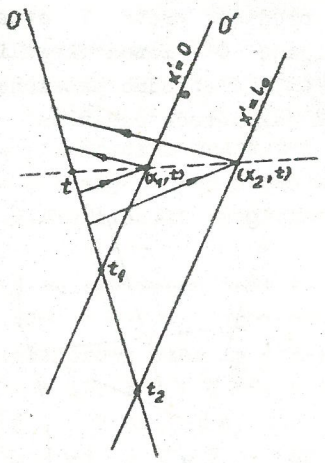
Taki sam wynik dostaniemy, wykonując przejście graniczne z $c \longrightarrow \infty$. Otrzymane wzory odpowiadają specjalnym przekształceniom Galileusza. Wyniki fizyki relatywistycznej przy prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła lub, co na jedno wychodzi, przy uznaniu prędkości światła za wielkość nieskończenie dużą przechodzą w wyniki fizyki newtonowskiej. Zdanie to dotyczy nie tylko samych przekształceń Lorentza, lecz także innych wniosków otrzymanych na podstawie teorii względności.

E f e k t D o p p l e r a . Rozpatrzmy płaską falę monochromatyczną poruszającą się od obserwatora O do obserwatora O'. Składowa pola takiej fali jest proporcjonalna do $\cos k(x - ct)$. Pomnożona przez 2π częstość drgań tej fali wynosi $\omega = kc$, długość fali zaś $\lambda = 2\pi/k$. Wiadomo, że $x - ct = \frac{1}{\alpha}(x' - ct')$, a więc $\omega' = \frac{k}{\alpha} c = \frac{\omega}{\alpha}$, natomiast $\lambda' = \alpha\lambda$. Zapiszmy wzór na zmianę częstości w następujący sposób:

$$\omega' = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,\omega .$$

Licznik w tym wzorze pokrywa się z wzorem klasycznym, natomiast mianownik jest rezultatem dylatacji czasu. Relatywistyczny efekt Dopplera stwierdzili doświadczalnie w 1937 r. Ives i Stilwell [2], potwierdzając tym samym dylatację czasu.

S k r ó c e n i e d ł u g o ś c i . Niech pręt o długości l_0 w układzie, w którym spoczywa, porusza się z prędkością V względem obserwatora inercjalnego O . Aby móc odpowiedzieć na pytanie, jaka jest długość pręta l mierzona przez obserwatora O , należy podać metodę pomiaru. Przypuśćmy, że O dokonuje pomiaru metodą radarową, tzn. taką samą metodą, którą były wyprowadzone przekształcenia Lorentza. Chwile t_1, t_2 odpo-



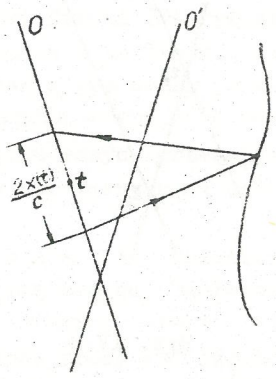
Rys. IV.8

wiadają minięciu przez końce pręta obserwatora O . Obserwator O wyśle dwa sygnały świetlne w kierunku końców pręta. Zrobi to w ten sposób, żeby z jego punktu widzenia odbicie od obu końców pręta nastąpiło równocześnie (rys. IV.8). Za pomocą opisanej poprzednio metody określi on odległości x_1, x_2 obu końców pręta od siebie i stwierdzi, że długość pręta wynosi $l = x_2 - x_1$. Umieszczając fikcyjnego obserwatora O' w jednym z końców pręta i posługując się szczególnymi przekształceniami Lorentza, dojdziemy do wniosku, że

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad .$$

Zatem z punktu widzenia obserwatora O pręt jest krótszy niż z punktu widzenia obserwatora O' , dla którego pręt ten spoczywa. Zauważmy, że wzór na skrócenie długości pokrywa się ze wzorem proponowanym przez Fitzgeralda i Lorentza w celu wyjaśnienia wyników doświadczenia Michelsona-Morleya.

Istnieje jeszcze inny sposób pomiaru długości pręta przez O. Mianowicie mierząc prędkość pręta V oraz chwile t_1, t_2, w których końce pręta mijają O, można określić długość pręta równością $l = V(t_1 - t_2)$. Nietrudno przekonać się, że ta metoda daje taki sam wynik jak metoda radarowa.



Rys. IV.9

P r a w o s k ł a d a n i a p r ę d k o ś c i . Obserwatorzy O, O' będą opisywać ruch punktu materialnego w różny sposób (rys. IV.9). Obserwator O będzie podawał odległość x w chwili t, to znaczy funkcję $t \longmapsto x(t)$, natomiast obserwator O' będzie opisywał ten ruch funkcją $t' \longmapsto x'(t')$. Prędkość punktu materialnego względem obserwatora O będzie $v = dx/dt$, względem zaś obserwatora O' będzie $v' = dx'/dt'$. Ponieważ mamy

$$x = \frac{x' + Vt'}{1 - \beta^2} \qquad \text{oraz} \qquad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{1 - \beta^2}$$

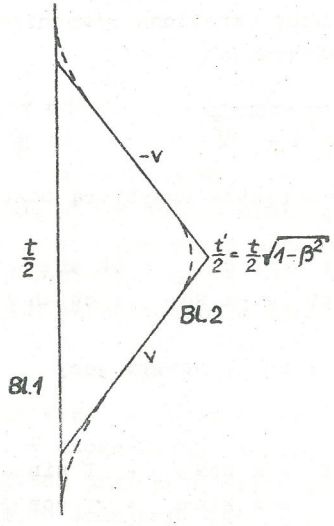
otrzymujemy wzór

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}} = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

Przedyskutujemy ten wzór. Pierwszy nasuwający się wniosek jest taki, że nierówność $|v'| \leq c$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy zachodzi nierówność $|v| \leq c$. Szczególnie $v = c$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $v' = c$. Takie zresztą było wyjściowe założenie. Ze wzoru tego bynajmniej nie wynika, że prędkość v nie może przekraczać prędkości światła. Teoria względności nie wypowiada się na ten temat w sposób kategoryczny. Do sprawy przekraczalności prędkości światła jeszcze powrócimy w rozdz. V.

Inny wniosek z tego samego wzoru jest taki, że w granicy nierelatywistycznej, gdy $c \longrightarrow \infty$, otrzymujemy $v = v' + V$, a więc klasyczny, galileuszowy wzór na dodawanie prędkości.

"P a r a d o k s" b l i ź n i ą t albo "p a r a d o k s" z e g a r ó w. Poprzednio otrzymaliśmy wzór na dylatację czasu: $t' = t\sqrt{1 - \beta^2}$. Wzór ten prowadzi do wniosków na pozór paradoksalnych. Mianowicie powiada się, że je-



Rys. IV.10

den z braci bliźniąt, wysłany w daleką podróż kosmiczną, będzie młodszy od drugiego po powrocie na Ziemię. Rozumowaniu temu zarzuca się, że jest błędne, ponieważ sytuacja obu braci jest właściwie jednakowa, jako że każdy z nich porusza się z taką samą (co do wartości) prędkością względem drugiego. Niesłuszność takiego rozumowania ilustruje rys. IV.10. To że jeden z braci doznaje przyspieszeń, narusza symetrię między nimi. Linia ciągła na rys. IV.10 jest idealizacją "podróży bliźniaka"; linia świata podróżującego bliźniaka musi być gładka, gdyż nie może on podlegać nieskończenie dużym przyspieszeniom. Rzeczywistą linię świata tego bliźniaka w okresie, gdy działają silniki jego rakiety, charakteryzuje linia przerywana [4]. Do zagadnienia bliźniąt wrócimy jeszcze w następnym rozdziale.

G e o m e t r y z a c j a s k ł a d a n i a p r ę d k o ś c i. Niezmiennik szczególnych przekształceń Lorentza $x^2 - c^2t^2$ przypomina pitagorejski kwadrat odległości. Kładąc $\tau = ict$, otrzymujemy bowiem ten niezmiennik w postaci $x^2 + \tau^2$. Niech ψ oznacza liczbę określoną równaniem $\operatorname{th}\psi = \beta$. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \operatorname{sh} = \frac{1\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

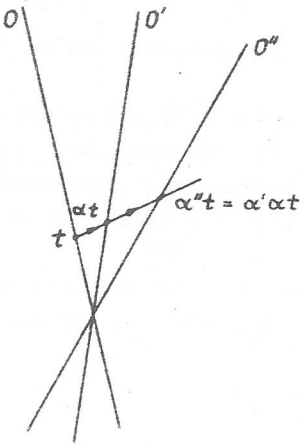
Przekształcenia Lorentza przybiorą postać

$$x' = x\operatorname{ch}\psi - ct\operatorname{sh}\psi,$$
$$ct' = -x\operatorname{sh}\psi + ct\operatorname{ch}\psi.$$

Podstawiając $\psi = i\varphi$, otrzymujemy ($\operatorname{ch} i\varphi = \cos\varphi$, $\operatorname{sh} i\varphi = i\sin\varphi$):

$$x' = x\cos\varphi - \tau\sin\varphi,$$
$$\tau' = x\sin\varphi + \tau\cos\varphi.$$

A więc w płaszczyźnie (x, τ) przejściu od jednego układu inercjalnego do drugiego odpowiada obrót o kąt φ. Kąt ψ no-



Rys. IV.11

si nazwę kątą hiperbolicznego. Nietrudno sprawdzić, że $\alpha = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} = \exp\psi$, czyli $\psi = \ln\alpha$. Wyobraźmy sobie trzech obserwatorów inercjalnych 0, 0′, 0″, których linie świata przecinają się w jednym punkcie (rys. IV.11). Współczynniki α, α', α'' odpowiadają przejściom kolejno między układami 0 a 0′, między 0′ a 0″ oraz między 0 a 0″. Odpowiednie kąty hiperboliczne są zdefiniowane równościami: $\psi = \ln\alpha$, $\psi' = \ln\alpha'$, $\psi'' = \ln\alpha''$. Zgodnie z definicją współczynników α mamy $\alpha'' = \alpha'\alpha$. Z tego wynika, że $\psi'' = \psi + \psi'$. Widzimy więc, że kąty hiperboliczne są wielkościami addytywnymi. W szczególnej teorii względności zamiast dodawania prędkości przy przejściu od jednego układu inercjalnego do drugiego dodajemy kąty hiperboliczne. Jednak takie proste (przemienne) prawo składania obowiązuje jedynie dla ruchów odbywających się w tym samym kierunku.

Literatura

1. BONDI H.: Relativity and common sense. Doubleday and Co., Garden City 1964.
2. IVES H.E., STILWELL C.R.: Experimental study of the rate of a moving clock. J. Opt. Soc. Amer. 28,1938,s. 215-226.
3. LORENTZ H.A.: Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light.Proc. Acad. Sc. Amsterdam 6, 1904, s. 309.
4. TERRELL J.: Relativistic observations and the clock problem. Nuovo Cimento 16, 1960, s, 457-468.

V. Geometria Minkowskiego

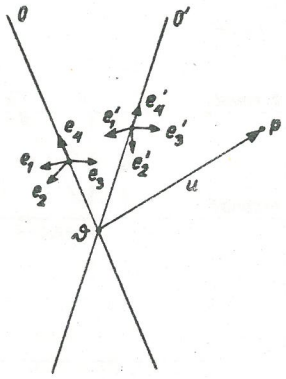
Stwierdziliśmy poprzednio, że dwaj obserwatorzy inercjalni (rys. V.1), którzy przyjmują za początek układu zdarzenie ϑ odpowiadające przecięciu ich linii świata,przypisują zdarzeniu p taką samą liczbę $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$, zwaną kwadratem interwału między ϑ a p . Jest to odpowiednik kwadratu odległości w zwykłej dwuwymiarowej geometrii euklidesowej, a więc wyrażenia postaci $x^2 + \tau^2$. Uwzględnienie czterowymiarowości czasoprzestrzeni jest nietrudne.Przez odpowiedni dobór reperu (ϑ, e_i) kwadrat skalarny wektora $u = p - \vartheta$ można doprowadzić do postaci

$$g(u, u) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

gdzie

$$p = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 + \vartheta$$

Wróćmy do czasoprzestrzeni Galileusza. Okazuje się, że w tej czasoprzestrzeni można wprowadzić ów iloczyn skalarny, jeżeli uwzględni się istnienie eteru. Przypominamy, że czasoprzestrzenią Galileusza nazywaliśmy czterowymiarową prze-



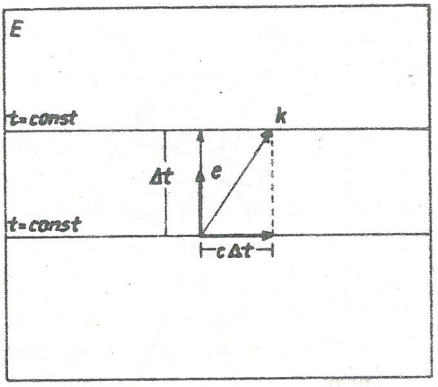
Rys. V.1

strzeń afiniczną, w której były określone dwa elementy metryczne: forma czasu absolutnego $\tau \in V^{*}$ oraz iloczyn skalarny h w podprzestrzeni $S = \ker \tau$ wektorów przestrzennych. Ten model czasoprzestrzeni wystarczał do opisu zjawisk mechanicznych. Aby opisywać w nim zjawiska elektromagnetyczne, należało dodać eter, tzn. nieprzestrzenny wektor e. Przyjmujemy konwencję, że wektor ten jest odpowiednio unormowany, tj. $\tau(e) = 1$. Dla dowolnego wektora $k \in V$ możemy napisać

$$k = e\,\tau(k) + (k - e\,\tau(k)).$$

Nietrudno zauważyć, że $\tau(k - e\,\tau(k)) = 0$, więc $k - e\,\tau(k)$ jest wektorem przestrzennym (należy do S), czyli można na nim określić kwadrat skalarny h. Jeśli $k \in V$ jest wektorem stycznym do linii świata promienia świetlnego (jest wektorem propagacji), to równość

$$\frac{\sqrt{h(k - e\,\tau(k),\ k - e\,\tau(k))}}{\tau(k)} = c$$



Rys. V.2

jest matematycznym sformułowaniem faktu, że światło ma względem eteru stałą, równą c, prędkość rozchodzenia się.

Można też postąpić inaczej. Mianowicie określmy odwzorowanie $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^1$ w następujący sposób ($u, v \in V$):

$$g(u, v) = c^2 \tau(u)\,\tau(v) - h(u - e\,\tau(u),\ v - e\,\tau(v)).$$

Równość $g(k, k) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy k jest wektorem kierunkowym promienia świetlnego. O wektorach spełniających równanie $g(k, k) = 0$ mówi się, że są to wektory zerowe. Widzimy zatem, że wektory zerowe są wektorami propagacji światła (rys. V.2). Z tego powodu często zamiast terminu wektor zerowy używa się terminu wektor świetlny.

Odwzorowanie g ma wszystkie własności iloczynu skalarnego: jest dwuliniowe i symetryczne. Ponadto g jest nieosobliwym iloczynem skalarnym, to znaczy zachodzenie równości $g(u, v) = 0$ dla każdego wektora $v \in V$ pociąga za sobą

równość $u = 0$. Własność ta wynika z tego, że kładąc $v = e$ otrzymujemy $g(u, e) = c^2 \tau(u) = 0$, a więc $u \in S$. Dla wektorów przestrzennych, tj. należących do S, iloczyn skalarny g pokrywa się z iloczynem skalarnym h, który jest nieosobliwy.

Udowodniliśmy zatem, że jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich wektorów z V w sensie iloczynu skalarnego g jest 0. Istotną cechą różniącą g od h jest to, że g nie jest iloczynem dodatnio (ani ujemnie) określonym, czyli równość $g(u, u) = 0$ nie pociąga za sobą $u = 0$.

Mamy obecnie w czasoprzestrzeni E następujące elementy geometryczne: τ, h, e. Zamiast nich możemy podać τ oraz g. Rzeczywiście, mając τ oraz g, możemy zdefiniować e jako wektor spełniający $\tau(e) = 1$ i $g(e, e) = c^2$, natomiast h definiujemy wtedy przekształcając tożsamość definiującą g. Podobnie e oraz g stanowią zespół równoważnych informacji o czasoprzestrzeni, którą należałoby ochrzcić nazwiskami Maxwella i Lorentza. Czasoprzestrzeń ta stanowi model opisu zjawisk mechanicznych i elektromagnetycznych. Aby opisywać w tym modelu zjawiska mechaniczne, można ograniczyć się do τ oraz h. Przeciwnie, iloczyn skalarny g, jak okazuje się, wystarcza do sformułowania elektrodynamiki w próżni.

Krok wykonany przez Einsteina polegał na tym, że z tych wszystkich elementów geometrycznych pozostawił tylko iloczyn skalarny g w swoim modelu czasoprzestrzeni. Teoria Einsteina, zwana szczególną teorią względności, stanowi opis własności czasoprzestrzeni będącej dobrym "tłem" dla wszystkich zjawisk fizycznych z wyjątkiem zjawisk związanych z grawitacją.

Przeanalizujemy własności iloczynu skalarnego g. Mówi się, że iloczyn ten ma sygnaturę $(+, -, -, -)$, to znaczy, że można wybrać taką bazę (e_0, e_1, e_2, e_3) (wektor bazy e_4 został zastąpiony wektorem $e_0 = e_4/c$), iż macierz $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ będzie miała postać

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j = 0, \\ -1 & \text{dla } i = j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Bazę o wyżej podanej własności nazywa się bazą ortonormalną.

Rozłóżmy wektory $u, v \in V$ na wektory takiej bazy: $u = u^i e_i$, $v = v^i e_i$. Iloczyn skalarny wektorów u, v jest postaci

$$g(u, v) = g_{ij} u^i v^j = u^0 \cdot v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v} ,$$

gdzie $(u^i) = (u^0, \vec{u})$, $(v^i) = (v^0, \vec{v})$, symbol zaś $\vec{u} \cdot \vec{v}$ oznacza zwykły iloczyn skalarny w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Dowolne zdarzenie p, rozpisane względem reperu (ϑ, e_i), ma postać

$$p = cte_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 + \vartheta .$$

Zerowa współrzędna ma postać ct; t jest tu czasem względem konkretnego reperu ortonormalnego (ϑ, e_i).

P r z e s t r z e n i ą M i n k o w s k i e g o (afiniczną) nazywa się trójkę (E, V, g), gdzie (E, V) jest czterowymiarową przestrzenią afiniczną, g zaś iloczynem skalarnym w V o sygnaturze $(+, -, -, -)$. Parę (V, g) nazywa się w e k t o r o w ą p r z e s t r z e n i ą M i n k o w s k i e g o .

Przestrzeń Minkowskiego stanowi model szczególnej teorii względności. Znaczy to, iż trójka (E, V, g) jest, z punktu widzenia matematyki, prawie wszystkim tym, co nazywa się szczególną teorią względności. Znaczenie słowa "prawie" zostanie wytłumaczone później.

Mając pewną strukturę matematyczną, należy zbadać jej automorfizmy. Badaliśmy już automorfizmy czasoprzestrzeni Galileusza zwane przekształceniami Galileusza. Obecnie zajmiemy się automorfizmami przestrzeni Minkowskiego, które nazywają się przekształceniami Poincarégo.

P r z e k s z t a ł c e n i e m P o i n c a r é g o nazwiemy parę bijekcji $f : E \longrightarrow E$ i $\lambda_f : V \longrightarrow V$ takich, że:

1° λ_f jest odwzorowaniem liniowym,

2° $f(p + u) = f(p) + \lambda_f(u)$ dla dowolnych $u \in V$, $p \in E$,

3° $g(\lambda_f u, \lambda_f v) = g(u, v)$, $(v \in V)$.

λ_f jest wyznaczone przez f (jak to sugeruje zapis), a nazywa się p r z e k s z t a ł c e n i e m L o r e n t z a . Czasem też stosowana jest inna terminologia, według której f nazywa się przekształceniem Lorentza, λ_f zaś jednorodnym przekształceniem Lorentza.

Przekształcenia Poincarégo są automorfizmami afinicznej przestrzeni Minkowskiego, natomiast przekształcenia Lorentza są automorfizmami wektorowej przestrzeni Minkowskiego. Przekształcenia Poincarégo stanowią grupę zwaną grupą Poincarégo. Oznaczymy ją przez $Aut(E, V, g)$. Podobnie mamy grupę Lorentza $Aut(V, g)$. Nietrudno pokazać, że $\lambda_{f_1 \circ f_2} = \lambda_{f_1} \circ \lambda_{f_2}$

a więc odwzorowanie $\lambda : Aut(E, V, g) \longrightarrow Aut(V, g)$ jest homorfizmem grupy Poincarégo na grupę Lorentza.

Przykładem odwzorowania Poincarégo jest translacja. Mianowicie przyporządkujemy $v \in V$ odwzorowanie $\alpha_v : E \longrightarrow E$ takie, że $\alpha_v(p) = v + p$ dla dowolnego punktu $p \in E$. Łatwo zauważyć, że α_v jest przekształceniem Poincarégo takim, że odpowiadające mu przekształcenie Lorentza jest tożsamościowym odwzorowaniem V. Stwierdzamy następnie, że $\alpha_{v_1+v_2} = \alpha_{v_1} + \alpha_{v_2}$, zatem odwzorowanie $\alpha : V \longrightarrow Aut(E,V,g)$

jest (różnowartościowym) homorfizmem grup, jeżeli będziemy traktować V jako grupę ze względu na dodawanie. Otrzymaliśmy więc ciąg homomorfizmów:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} Aut(E, V, g) \xrightarrow{\lambda} Aut(V, g) \longrightarrow 0 .$$

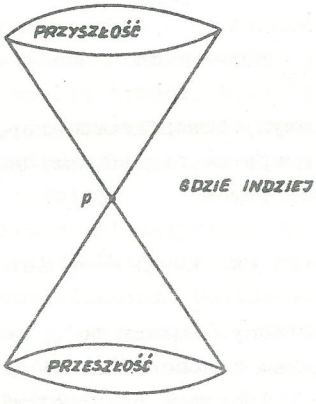
Ciąg ten jest dokładny. Znaczy to, że obraz homomorfizmu α pokrywa się z jądrem homomorfizmu λ. Grupa Poincarégo okazuje się być tzw. iloczynem półprostym grupy wektorowej V przez grupę Lorentza. Grupa Poincarégo jest przedmiotem intensywnych badań ze strony fizyków. Dzieje się tak dlatego,

że niemal cała kinematyka cząstek elementarnych sprowadza się do badania własności tej grupy.

Wektory z V możemy klasyfikować ze względu na znak ich kwadratu skalarnego; jeżeli

$$g(u, u)\begin{cases} > 0, \text{ to } u \text{ nazywamy wektorem czasowym,} \\ = 0, \text{ to } u \text{ nazywamy wektorem zerowym,} \\ < 0, \text{ to } u \text{ nazywamy wektorem przestrzennym.} \end{cases}$$

Na podstawie tego podziału klasyfikujemy inne twory geometryczne w przestrzeni Minkowskiego. Na przykład mówimy, że zdarzenia p, q są względem siebie czasowe (ewentualnie zerowe lub przestrzenne), jeżeli wektor p - q jest czasowy (odpowiednio zerowy lub przestrzenny). Zdarzenia zerowe względem pewnego zdarzenia $p \in E$ tworzą w przestrzeni Minkowskiego stożek zwany stożkiem zerowym (lub świetlnym), który dzieli pozostałą część czasoprzestrzeni na trzy rozłączne obszary (rys. V.3). Dwa z nich zawierają zdarzenia czasowe względem p , jeden zaś zdarzenia przestrzenne. Obszary cza-



Rys. V.3

sowe stanowią wnętrza dwóch składowych stożka zerowego. Jeden z tych obszarów nazywamy przeszłością, a drugi przyszłością względem zdarzenia p , zaliczając do przeszłości i przyszłości także odpowiadające tym obszarom składowe stożka.

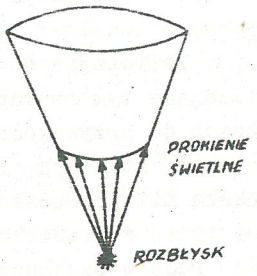
Do zdarzeń należących do przyszłości zdarzenia p (i tylko do nich) można dotrzeć, startując z p i poruszając się z prędkością nie większą niż prędkość światła. Do zdarzenia p można było dotrzeć tylko z przeszłości zdarzenia p , jeżeli ograniczyć się do ruchów zachodzących z prędkością mniejszą niż prędkość światła.

Zdarzenia leżące poza stożkiem zerowym zdarzenia p (tj. przestrzenne względem p) nie są związane przyczynowo z p, jeżeli ograniczyć się do ruchów z prędkościami mniejszymi niż c , dlatego też ten obszar nazwaliśmy: gdzie indziej.

Rozróżnienie przyszłości od przeszłości jest nowym elementem w modelu matematycznym szczególnej teorii względności. Teraz znamy już pełny model. Jest nim zorientowana czasowo przestrzeń Minkowskiego. Orientacja czasowa występuje zresztą w podstawowych prawach fizyki w sposób bardziej dyskretny niż iloczyn skalarny g . Konkretnie, orientacja czasowa nie występuje w podstawowych równaniach fizyki, ale jedynie w warunkach brzegowych. Na przykład w elektrodynamice orientacja czasowa ingeruje w ten sposób, że uwzględniamy tzw. rozwiązania opóźnione równań falowych, odrzucamy zaś rozwiązania przedwczesne. Innymi słowy, uwzględniamy to, że promienie świetlne rozchodzą się w czasie tylko w przód, jak to zostało zaznaczone na rys. V.4.

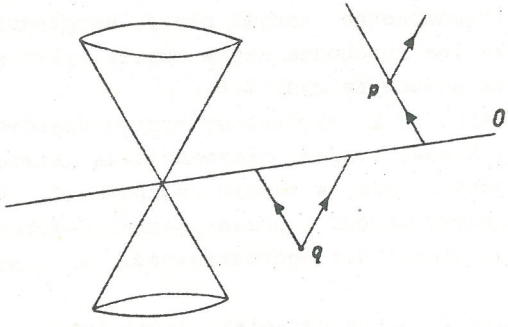
Wśród krzywych w E wyróżniamy krzywe czasowe, zerowe i przestrzenne. Krzywą czasową nazywamy taką krzywą, której wektor styczny jest czasowy w każdym jej punkcie; analogicznie definiujemy krzywe zerowe i przestrzenne. Podobne rozróżnienia możemy wprowadzić dla podrozmaitości E o wymiarze wyższym niż 1.

Jak nas uczy I zasada dynamiki, linie świata obserwatorów inercjalnych są prostymi w E . Powstaje pytanie, czy mogą to być dowolne proste?



Rys. V.4

Przypuśćmy, że linia świata obserwatora O jest przestrzenna. Istnieje wtedy takie zdarzenie p , iż żadne zdarzenie z linii świata obserwatora O nie leży w przyszłości p ; podobnie istnieje q takie, iż linia świata O nie przechodzi przez przeszłość q (rys. V.5). Obserwator O nie ma możności przesłać żadnych sygnałów świetlnych do q, a co

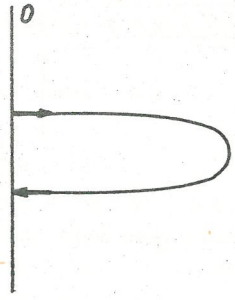


Rys. V.5

gorsza, nigdy nie dowie się, co zdarzyło się w p , jeżeli będzie posługiwał się tylko sygnałami świetlnymi (lub innymi sygnałami, których prędkość rozchodzenia się jest nie większa niż c).

Jeśli zgodzimy się z tym, że w ostatecznym rachunku wszystkie informacje o zewnętrznym świecie otrzymujemy za pośrednictwem sygnałów elektromagnetycznych,to możemy stwierdzić, iż świat nie jest poznawalny dla obserwatora O , co wydaje się być sprzeczne z doświadczeniem. Wnioskujemy z tego, że nie ma obserwatorów inercjalnych, których linie świata byłyby prostymi przestrzennymi. Tak samo dochodzimy do wniosku, iż linie świata obserwatorów inercjalnych nie mogą być prostymi zerowymi. Z tego wynika, że względna prędkość dwóch obserwatorów inercjalnych musi być mniejsza niż c .

Wprowadzenie orientacji czasowej pozwala uporządkować w czasie zdarzenia czasowe i zerowe względem siebie. Nie ma natomiast żadnego sposobu, żeby uporządkować czasowo zdarzenia przestrzenne względem siebie.

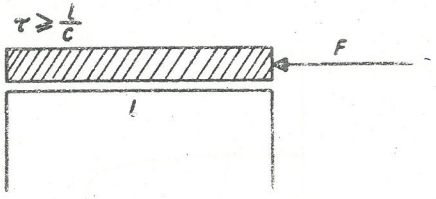


Rys. V.6

Czy możliwe są ruchy o przestrzennych liniach świata,więc ruchy z prędkościami większymi niż c względem dowolnego obserwatora inercjalnego? Nie należy sądzić,iż szczególna teoria względności daje na to pytanie kategorycznie negatywną

odpowiedź. Większość fizyków jest jednak zdania,że ruchy takie nie istnieją. Istnienie cząstek poruszających się z prędkością większą niż prędkość światła, noszących nazwę tachionów, doprowadziłoby do wniosków sprzecznych z zasadą przyczynowości.

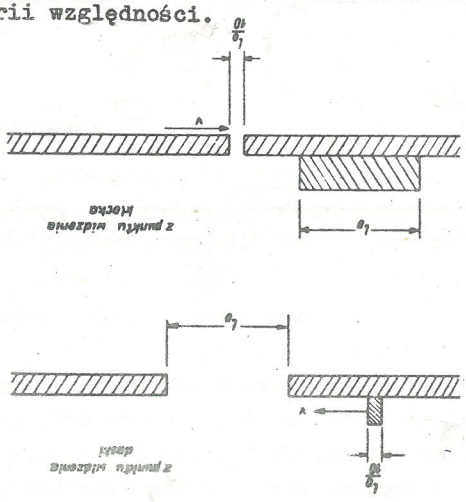
Wyobraźmy sobie, że obserwator O wysyła tachion obdarzony pewną energią. Można sobie wyobrazić procesy,w których ten tachion bierze udział zmieniając swoją energię i pęd. Po kilku takich procesach można sobie wyobrazić, że "nowy" tachion wróciłby wcześniej do obserwatora O niż ten "pierwszy" został wysłany, wnosząc ze sobą jakąś energię (rysunek V.6). Można by tę energię wzmocnić za pomocą odpowiednich wzmacniaczy do takich rozmiarów, że na przykład laboratorium wytwarzające tachiony zostałoby zniszczone, a dopiero później wysłałoby "pierwotny" tachion. W ten sposób dochodzimy do wniosków paradoksalnych.



Rys. V.7

Będziemy przyjmować, że nie jest możliwe przekazywanie energii z prędkościami większymi niż c . Z tego natychmiast wynika, iż nie istnieją ciała doskonale sztywne. Bo przypuśćmy, że podziałaliśmy pewną siłą na jeden z końców "sztywnego" pręta o długości spoczynkowej równej l . Koniec ten będzie poruszał się z odpowiednim przyspieszeniem, natomiast

drugi koniec będzie spoczywał przez okres czasu τ nie mniejszy niż l/c, po którym dopiero dotrze do niego informacja o tym, co się stało z pierwszym końcem (rys. V.7). O ciałach sztywnych można mówić jedynie wtedy, kiedy nie działają na nie żadne siły, a więc w przypadku ruchów jednostajnych i prostoliniowych. Stąd też wzięły się trudności ze sztywnymi prętami pomiarowymi występującymi we wcześniejszych sformułowaniach teorii względności.

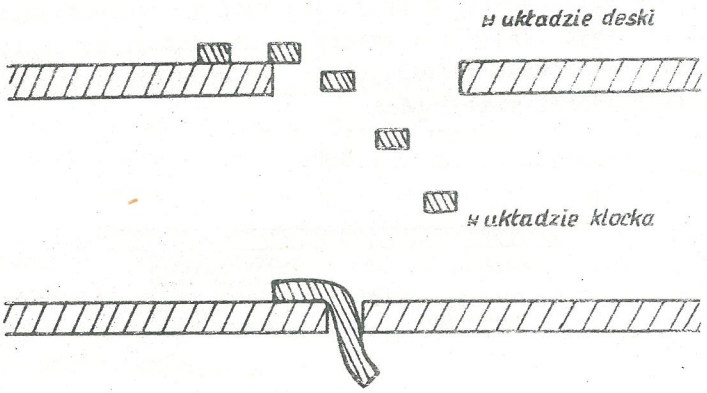


Rys. V.8

Z problemem sztywności wiąże się pewien znany "paradoks". Mianowicie wyobraźmy sobie klocek, o długości spoczynkowej l_0 poruszający się po poziomej desce, który zbliża się do dziury o długości spoczynkowej wynoszącej również l_0. Niech prędkość klocka będzie tak duża, aby odgrywało jakąś rolę relatywistyczne skrócenie długości; niech np. $\sqrt{1-\beta^2} = 1/10$. Pobieżny wniosek wysunięty na podstawie tego skrócenia jest nonsensowny: z punktu widzenia deski klocek powinien wpaść w dziurę, a z punktu widzenia klocka nie zmieści się on do dziury (rys. V.8).

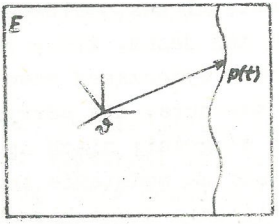
Nietrudne jest wyjaśnienie tego "paradoksu" na podstawie

poprzednio dokonanej krytyki pojęcia sztywności. Otóż w zagadnieniu tym bezpośrednią przyczyną wpadnięcia klocka do dziury jest siła grawitacyjna, a skoro ona występuje, to pojęcie sztywności traci sens.



Rys. V.9

Trudno jest dać jednoznacznie odpowiedź na pytanie:co stanie się z klockiem? Żeby dać na to odpowiedź, należałoby znać naturę sił, które zapewniają "sztywność" klocka. Nawet przecież przy małych prędkościach inaczej zachowuje się gumowa lina, a inaczej kawałek drewna. Odpowiedź na postawione wyżej pytanie może być taka jak na rys. V.9 [1].



Rys. V.10

Historia punktu materialnego jest krzywą w E. Gdy E była czasoprzestrzenią Galileusza, parametryzowaliśmy taką krzywą za pomocą czasu absolutnego t. Obecnie, gdy E jest czasoprzestrzenią Minkowskiego, nie mamy do dyspozycji czasu absolutnego, lecz czasy względem dowolnego reperu ortonormalnego. Przypomnijmy, że punkt $p \in E$, będący zdarzeniem z historii pewnego punktu materialnego, można rozpisać względem reperu $(\mathcal{O}, e_i)$ w następujący sposób:

$$p = x^i(t)\, e_i + \mathcal{O},$$

gdzie $x^0 = ct$, $x^1 = x(t)$, $x^2 = y(t)$, $x^3 = z(t)$ (rys. V.10). Chcemy znaleźć parametryzację linii świata, która nie należałaby od wyboru reperu, lecz wyznaczona byłaby jedynie przez elementy geometryczne w modelu czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności. Oczywiście, odpowiednim parametrem jest długość łuku s mierzona za pomocą iloczynu skalarnego g. Poszukamy związku długości s z czasem t względem reperu $(\mathcal{O}, e_i)$. Wektor styczny do linii świata ma w bazie (e_i) postać

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (c, \vec{v}),$$

jego długość zaś wynosi

$$\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = c\sqrt{1 - \beta^2}$$

zatem długość łuku w funkcji t

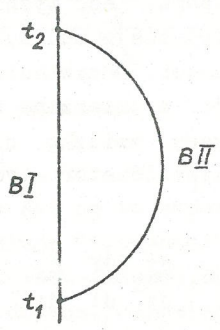
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt',$$

co można inaczej zapisać

$$\frac{ds}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Parametr s nazywamy c z a s e m w ł a s n y m. Skąd bierze się ta nazwa? Stąd, że dla spoczynku mamy $v = 0$, a zatem $s(t) = c(t - t_0)$. Więc czas własny punktu materialnego, spoczywającego względem pewnego obserwatora inercjalnego, pokrywa się (z dokładnością do stałej multiplikatywnej c) z czasem mierzonym przez zegary tego obserwatora. Teraz możemy podać definicję idealnego zegara.

Zegarem i d e a l n y m nazwiemy taki zegar, który odmierza czas własny wzdłuż swojej linii świata niezależnie od ruchu, jaki wykonuje. W przyrodzie nie ma takich zegarów; możemy jedynie konstruować takie układy fizyczne, które będą w określonych warunkach dobrze przybliżać zegar idealny.



Rys. V.11

Wróćmy jeszcze do paradoksu bliźniąt. Obecnie możemy go opisywać w sposób bardziej realistyczny. Nie będziemy mianowicie przybliżać linii świata podróżującego bliźniaka przez dwa odcinki, lecz pozostawimy ją krzywą gładką (rys. V.11). Zakładając, iż zegary biologiczne, jakimi są bliźniacy, odmierzają czasy własne, stwierdzamy, że słynny "paradoks" wynika z nierówności

$$\int_{t_1}^{t_2} c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt' \leq \int_{t_1}^{t_2} c\, dt' ,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, kiedy $v \equiv 0$. Oczywiście, "zegar biologiczny" człowieka z pewnością nie jest idealny, proces starzenia się zależy od wielu czynników, w tym także od przyspieszeń, których człowiek doznaje. Nie należy więc anegdoty o bliźniakach traktować zbyt dosłownie.

Używając czasu własnego, postępujemy zgodnie z zasadą względności Einsteina, gdyż nie wyróżniamy żadnego obserwatora inercjalnego. Linię świata punktu materialnego będziemy zatem parametryzować czasem własnym s. Wektor styczny w tej parametryzacji, który nazwiemy czterowektorem prędkości, wyraża się przez prędkość w pewnym inercjalnym układzie odniesienia w następujący sposób:

$$(u^i) = \left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

Wektor ten wyróżnia się wśród wektorów stycznych tym, że jest unormowany do jedności

$$g(u, u) = g_{ij}u^i u^j = 1 .$$

Odpowiednikiem przyspieszenia w szczególnej teorii względności jest czterowektor przyspieszenia w^i, zdefiniowany równością

$$w^i = du^i/ds .$$

Wektor ten jest prostopadły do czterowektora prędkości, gdyż różniczkując tożsamość $g_{ij}u^i u^j = 1$ otrzymuje się $2g_{ij}u^i w^j = 0$. Czerowektor przyspieszenia przy prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła, czyli w przybliżeniu nierelatywistycznym, sprowadza się do

$$w^i = (0, \frac{\vec{a}}{c^2}) .$$

Zajmiemy się teraz zagadnieniem równań ruchu punktu materialnego w teorii Einsteina. Ograniczymy się na razie do ru-

chów swobodnych. Newtonowskie prawo ruchu miało w tym przypadku postać

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \ .$$

Porównując ten wzór z nierelatywistycznym przybliżeniem czterowektora przyspieszenia stwierdzamy, iż einsteinowskie równanie ruchu swobodnego punktu materialnego będzie miało postać

$$mc^2 w^i = mc^2 \frac{d^2x^i}{ds^2} = 0 \ .$$

Do powyższego wniosku można dojść także inną drogą, a mianowicie wychodząc z zasady wariacyjnej, która jest, jak wiadomo, równoważna odpowiedniemu równaniu ruchu. W mechanice newtonowskiej punktu materialnego zasada ta ma postać

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} mv^2 \, dt = 0 \ .$$

W szczególnej teorii względności zasada wariacyjna powinna mieć postać

$$\delta \Big(\int_{\substack{\text{linia} \\ \text{świata}}} \text{const} \, ds \Big) = 0 \ .$$

Można pokazać, że jest to jedyna zasada wariacyjna, która prowadzi do równań drugiego rzędu względem współrzędnych cząstki i takiej samej postaci w każdym układzie inercjalnym. Pozostaje tylko wyznaczenie stałej. Uczynimy to, korzystając z tego, że zasada powyższa powinna przechodzić w zasadę newtonowską w granicy nierelatywistycznej. Obliczając

$$\text{const} \, ds = \text{const} \, c\sqrt{1 - v^2/c^2} \, dt \underset{c \to \infty}{\cong}$$

$$\underset{c \to \infty}{\cong} \text{const} \, c(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2) dt$$

otrzymujemy const = -mc, a więc einsteinowska zasada wariacyjna jest:

$$\delta(-mc \int ds) = 0 .$$

Relatywistyczna funkcja Lagrange'a jest następująca:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} = -mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + o(1/c^2) .$$

Widzimy, że z dokładnością do małej rzędu $1/c^2$ funkcja ta różni się od nierelatywistycznej funkcji Lagrange'a $L_{NR} = \frac{1}{2} mv^2$ o stałą. Pęd uogólniony, odpowiadający relatywistycznej funkcji Lagrange'a, jest

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

energia zaś

$$E = \vec{p}\,\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Energia i pęd tworzą razem czterowektor energii - pędu

$$p^i = mcu^i ,$$

którego współrzędne są równe

$$p^0 = mc \frac{dx^0}{ds} = mc^2 \frac{dt}{ds} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E}{c} ,$$

$$p^\alpha = mc \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

a zatem $(p^i) = E/c, \vec{p}$).

Wygodnie jest wprowadzić pojęcie masy relatywistycznej

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

wtedy bowiem wyrażenie na pęd przybierze postać

$$\vec{p} = m_{rel}\,\vec{v}$$

analogiczną do nierelatywistycznego związku między pędem a prędkością. Energia wyraża się przez masę relatywistyczną słynnym wzorem Einsteina

$$E = m_{rel}\,c^2 .$$

Masa m nosi nazwę spoczynkowej, gdyż dla prędkości v = 0 masa relatywistyczna pokrywa się z m , m_{rel} (v = 0) = m.

Z unormowania czterowektora prędkości wynika unormowanie czterowektora energii - pędu:

$$g_{ij}p^i p^j = m^2c^2 ,$$

a stąd otrzymujemy następujący związek między energią a pędem

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 .$$

Posługując się wzorem na masę relatywistyczną i związkiem między nią a energią, wzór na energię zapiszemy w nieco innej postaci

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + o\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Energia ta różni się od energii swobodnego punktu materialnego w mechanice Newtona $\frac{1}{2}mv^2$ o wielkość mc^2, jeżeli pominiemy małą rzędu $1/c^2$. Wyrażenie mc^2 nosi nazwę energii spoczynkowej. Nie można, jakby się to na pierwszy rzut oka wydawało, wydzielić energii spoczynkowej z całej energii. Postępowanie takie byłoby bowiem sprzeczne z zasadą względności. Mianowicie, aby to zrobić, należałoby wskazać układ inercjalny, w którym chce się wykonać powyższe odejmowanie.

Pokażemy teraz, jak wyglądają równania ruchu cząstki o

ładunku q w zewnętrznym polu elektromagnetycznym. Pole to jest opisywane czteropotencjałem $(A_i) = (\varphi, \vec{A})$. Wielkością bezpośrednio mierzoną w doświadczeniach jest tensor pola elektromagnetycznego

$$F_{ij} = \partial A_j / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^j .$$

Czteropotencjał nie ma bezpośredniego znaczenia fizycznego. Z równań pola elektromagnetycznego (równań Maxwella) wynika, że dla każdego pola istnieje czteropotencjał, jednakże nie jest on przez nie jednoznacznie wyznaczony. Dodanie do czteropotencjału gradientu funkcji,

$$A_i \longrightarrow A_i + \partial\chi / \partial x^i,$$

nie zmienia wartości pola F_{ij}. Okazuje się, że jest to jedyna niejednoznaczność w określeniu A_i. Polu F_{ij} w określonym inercjalnym układzie odniesienia odpowiadają wektory: natężenia pola elektrycznego $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ i natężenia pola magnetycznego $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$, zdefiniowane następująco

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Zgodna z zasadą względności postać równań ruchu naładowanej cząstki jest następująca:

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{q}{c} F^{ij} u_j ,$$

gdzie dokonano przyporządkowania: $u_j = g_{jk} u^k$, $F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}$. Przy pomocy wektorów $\vec{E}$ i $\vec{H}$ to równanie ruchu można zapisać inaczej:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} .$$

Literatura

1. W. RINDLER: Length contraction paradox. Amer. J. Phys. 29 1961, s. 365-366.

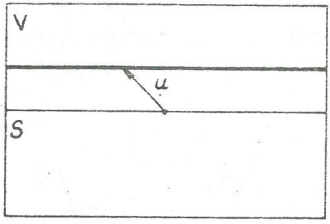
VI. PRZESTRZEŃ PRĘDKOŚCI. SPINORY I KSZTAŁT CIAŁ W RUCHU

W czasoprzestrzeni Galileusza czterowektor prędkości u ($u^i = dx^i/dt$) spełnia równanie $\tau(u) = 1$. Przestrzeń prędkości $\{u \in V : \tau(u) = 1\}$ jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową (rys. VI.1) Jest ona przestrzenią afiniczną, dla której przestrzeń wektorowa $S \subset V$ jest przestrzenią przesunięć, w S zaś, dzięki istnieniu iloczynu skalarnego h, określona jest odległość euklidesowa.

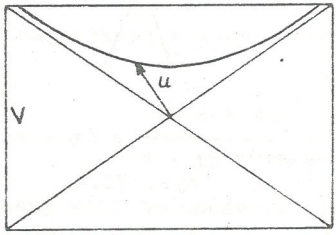
W czasoprzestrzeni Minkowskiego sytuacja jest nieco inna. Tutaj czterowektor prędkości u ($u^i = dx^i/ds$) spełnia warunek $g(u, u) = 1$, a więc $u^0 = \pm\sqrt{1 + \vec{u}^2}$, czyli $u^0 \geq 1$, albo $u^0 \leq -1$. Przyjmując pondato, że czasoprzestrzeń jest zorientowana czasowo, i ograniczając się do czterowektorów prędkości skierowanych ku przyszłości, możemy określić przestrzeń prędkości w szczególnej teorii względności jako

$$\{u \in V : g(u, u) = 1 \text{ oraz } u^0 \geq 1\} .$$

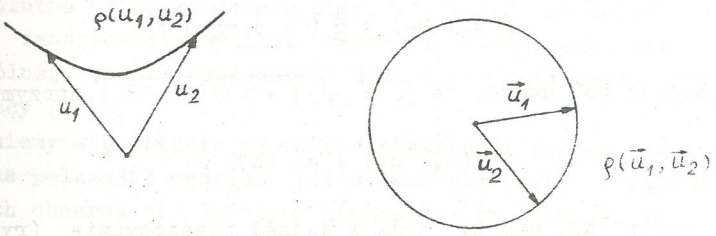
Zbiór ten jest trójwymiarową przestrzenią Łobaczewskiego, tj. rozmaitością riemannowską o stałej ujemnej krzywiźnie (rys. VI.2). Można wykazać, że odległość dwóch punktów w tej przestrzeni wynosi $\varrho(u_1, u_2) = \operatorname{ar\,ch}\, g(u_1, u_2)$. Wzór ten jest analogiczny do wzoru na odległość dwóch punktów na powierzchni kuli jednostkowej, gdzie zachodzi $\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \arccos(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$. Powierzchnia kuli jest rozmaitością o stałej dodatniej krzywiźnie (rys. VI.3).



Rys. VI.1

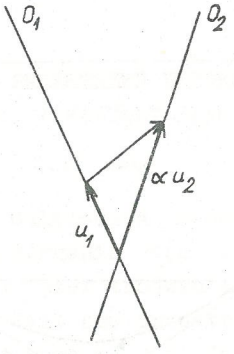


Rys. VI.2



Rys. VI.3

Wyobraźmy sobie, że obserwator inercjalny O_1, którego linia świata przecina linię obserwatora O_2, wysyła sygnał świetlny do tego drugiego (rys. VI.4).



Rys. VI.4

Wektor $u_1 - \alpha u_2$ jest wektorem kierunkowym tego sygnału, a więc jest to wektor zerowy. Z tego wynika, że

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha g(u_1, u_2) = 0$$

albo inaczej

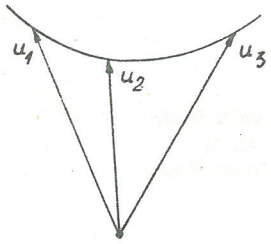
$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Biorąc pod uwagę, że $\alpha = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$, otrzymujemy

$$\varrho(u_1, u_2) = \operatorname{ar\,th}\beta .$$

Jeżeli u_1, u_2, u_3 leżą w jednej płaszczyźnie (rysunek VI.5), to obowiązuje

$$\varrho(u_1, u_2) + \varrho(u_2, u_3) = \varrho(u_1, u_3),$$



Rys. VI.5

(gdy $\rho(u_1, u_3)$ jest największą z tych trzech odległości). Zważywszy, że

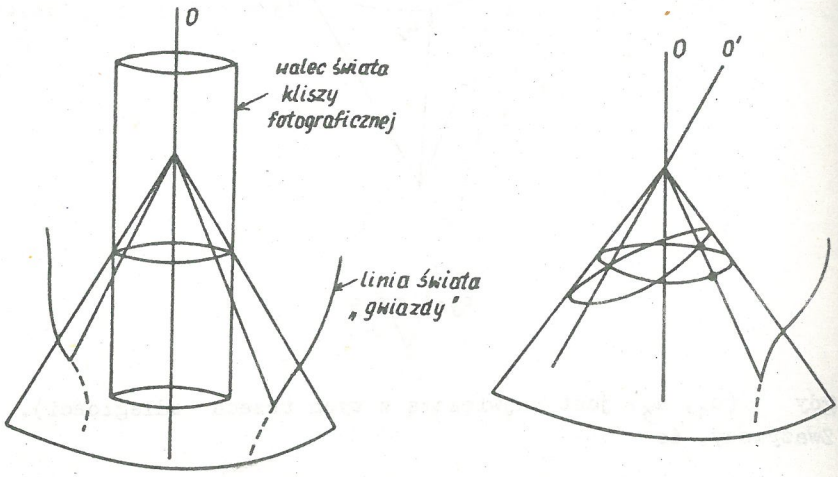
$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

rychło otrzymujemy znany wzór na dodawanie prędkości.

Znaczna część kinematyki relatywistycznej polega na zastosowaniu wyników geometrii przestrzeni Łobaczewskiego. Podana wyżej metoda otrzymywania wzoru na dodawanie prędkości jest jednym z przykładów tego zastosowania.

Interesujące jest, w jaki sposób wchodzą tu w grę zjawiska optyczne. Otóż promieniom świetlnym odpowiadają elementy absolutne ("nieskończenie odległe") w tej geometrii. Problemom zastosowania wyników geometrii Łobaczewskiego do szczególnej teorii względności dużo prac poświęcili fizycy radzieccy [1].

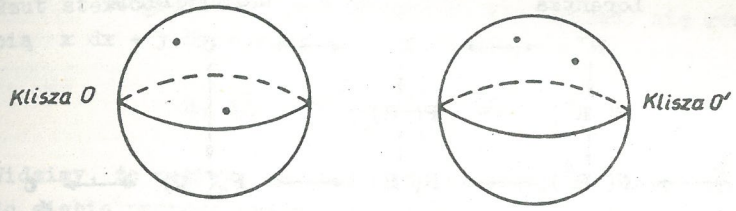
Zajmiemy się obecnie geometrią obserwacji optycznych. Na czym one polegają? Będziemy posługiwać się pewną idealizacją tych obserwacji. Założymy mianowicie, że wykonuje je obserwator inercjalny O, posługując się przy tym kliszą fotograficzną w kształcie powierzchni kuli. Klisza ta zostaje odsłonięta na moment w chwili t. Pozostaną na niej ślady



Rys. VI.6

zdarzeń znajdujące się na stożku przeszłościowym, który zawiera ją w momencie odsłonięcia, a mającym swój wierzchołek na linii świata O . Należy zanotować, że zarejestrowane zdarzenia na ogół nie będą równoczesne. Klisza obserwatora inercjalnego O' poruszającego się względem O ma walec świata pochylony względem poprzedniego (rys. VI.6). Odsłaniamy ją w takiej chwili, aby wierzchołek stożka, o którym była mowa wyżej, był punktem przecięcia linii świata O oraz O' . Będziemy teraz analizować, jaki jest związek między tym, co zostanie zarejestrowane na kliszy O, a tym, co zostanie zarejestrowane na kliszy O' (rys. VI.7). Analiza ta jest dość skomplikowana matematycznie.

Dowolna baza $e = (e_i)$ w wektorowej przestrzeni Minkowskiego określa izomorfizm $e : \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$, taki, że



Rys. VI.7

$$e(u) = u^i e_i, \text{ gdzie } u = (u^i) \in \mathbb{R}^4 .$$

Jeżeli baza e jest ortonormalna, to indukowany przez g iloczyn skalarny η w $\mathbb{R}^4$ ma postać

$$\eta(v, v) = v^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

gdzie $v = (t, x, y, z)$. W dalszym ciągu zamiast przestrzeni Minkowskiego (V, g) będziemy używać przestrzeni $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym η pamiętając, że postępowanie takie wyróżnia pewną bazę w V.

Podamy teraz, na czym będzie polegał plan naszych dalszych rozważań. Otóż będziemy starali się dokazać różnych związków między rozmaitymi przestrzeniami, a także między działającymi w nich grupami według schematu podanego na str. 94. W schemacie tym zastosowano następujące oznaczenia:

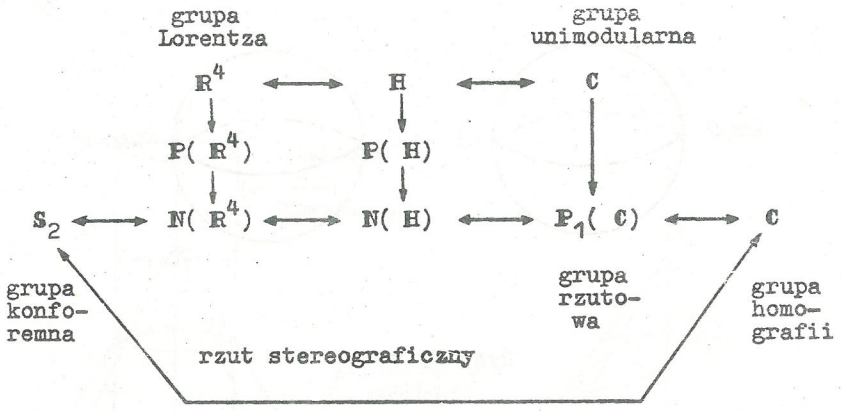
$\mathbb{H}$ - zbiór macierzy hermitowskich drugiego stopnia,

S_2 - sfera dwuwymiarowa,

$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ - jednowymiarowa zespolona przestrzeń rzutowa (zbiór kierunków w $\mathbb{C}$),

$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - płaszczyzna Gaussa.

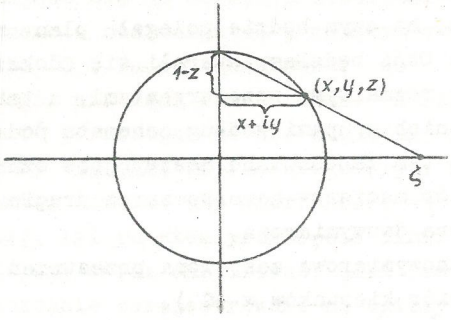
Symbole $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, $\mathbb{P}(\mathbb{H})$, $\mathbb{N}(\mathbb{R}^4)$, $\mathbb{N}(\mathbb{H})$ zostaną wyjaśnione później.



Początkowo zajmiemy się r z u t e m s t e r e o g r a f i c z n y m (rys. VI.8). Polega on na odwzorowaniu sfery na zespoloną płaszczyznę uzupełnioną punktem "w nieskończoności". Punktowi sfery parametryzowanemu liczbami x,y,z powiązanymi równością $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przyporządkowujemy

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z}, \text{ gdy } z \neq 1, \text{ oraz}$$

$$\zeta = \infty, \text{ gdy } z = 1.$$



Rys. VI.8

Rzut stereograficzny jest bijekcją. Posługując się równością $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ dochodzimy do

$$d\zeta\, d\bar{\zeta} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 - z)^2}.$$

Widzimy, że metryki na kuli i na płaszczyźnie zespolonej są do siebie proporcjonalne. Tę własność rzutu stereograficznego nazywamy konforemnością.

Odwzorowania konforemne charakteryzują się tym, że chociaż nie zachowują odległości (nie są izometriami), zachowują kąty. Kąt między dwiema krzywymi na kuli jest równy kątowi między obrazami tych krzywych na płaszczyźnie. Rzut stereograficzny przeprowadza okręgi na kuli na okręgi na płaszczyźnie albo, gdy okrąg przechodzi przez punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, na prostą.

Omówimy teraz związek między $\mathbb{R}^4$ wyposażonym w iloczyn skalarny η a zbiorem macierzy hermitowskich 2×2, który oznaczyliśmy $\mathbb{H}$. Zdefiniujemy odwzorowanie $\sigma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$,

$$\sigma(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że obraz dowolnego wektora $v = (t,x,y,z)$ przy odwzorowaniu σ jest rzeczywiście macierzą hermitowską $\sigma(v) = \sigma(v)^\dagger$. Odwzorowanie σ jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych. Ciekawą własnością tego odwzorowania jest to, że wyznacznik macierzy $\sigma(v)$ jest równy kwadratowi skalarnemu wektora v,

$$\det \sigma(v) = v^2.$$

Na marginesie można uczynić tu pewną uwagę dotyczącą bazy w przestrzeni wektorowej $\mathbb{H}$. Otóż wyróżnioną przez odwzorowanie σ bazą jest obraz kanonicznej bazy w $\mathbb{R}^4$:

$$\sigma(1, 0, 0, 0) = I$$
$$\sigma(0, 1, 0, 0) = \sigma_x$$
$$\sigma(0, 0, 1, 0) = \sigma_y$$
$$\sigma(0, 0, 0, 1) = \sigma_z$$

Macierze σ_x, σ_y, σ_z noszą nazwę macierzy Pauliego.

Niech $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ oznacza grupę unimodularnych (o wyznaczniku równym 1) zespolonych macierzy 2 stopnia.

Jeśli $U \in SL(2, C)$, natomiast $A \in \mathbf{H}$, to także $\bar{U}AU^T \in H$ dlatego, że

$$(\bar{U}AU^T)^\dagger = (U^T)^\dagger A^\dagger (\bar{U})^\dagger = \bar{U}AU^T$$

Ponadto odwzorowanie $\mathbf{H} \ni A \longrightarrow \bar{U}AU^T \in \mathbf{H}$ jest automorfizmem $\mathbf{H}$ jako przestrzeni wektorowej i $\det(\bar{U}AU^T) = \det A$. Do zapewnienia ostatniej równości jest właśnie potrzebna unimodularność macierzy U (wystarcza tu, by moduł wyznacznika U był równy 1). Dzięki temu, że przekształcenie $\mathbf{H}$ za pomocą macierzy U oraz odwzorowanie σ były izomorfizmami, istnieje jedyna macierz rzeczywista 4 stopnia $k(U)$ taka, że dla każdego $v \in \mathbb{R}^4$ zachodzi

$$U\,\sigma(v)U^T = \sigma(k(U)v)\,.$$

Ze względu na to, że U jest macierzą unimodularną, $k(U)$ zachowuje iloczyn skalarny η w $\mathbb{R}^4$, a więc otrzymaliśmy odwzorowanie $k : \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{R}^4, \eta)$. Mamy

$$\sigma(k(U_1U_2)v) = \overline{U_1U_2}\;\sigma(v)(U_1U_2)^T =$$
$$= \bar{U}_1 \cdot \bar{U}_2\,\sigma(v)U_2^T \cdot U_1^T = \sigma(k(U_1)\,k(U_2)v),$$

a zatem odwzorowanie k jest homomorfizmem grupy $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ w grupę Lorentza $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{R}^4, \eta)$. k nie jest homomorfizmem na całą grupę Lorentza; na przykład lorentzowskie przekształcenie, jakim jest inwersja $\mathbb{R}^4 \ni v \longmapsto -v \in \mathbb{R}^4$, nie należy do obrazu $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ przy odwzorowaniu k. Ów obraz, $k(\mathbf{SL}(2, \mathbb{C}))$, nazywa się właściwą grupą Lorentza $\mathbf{L}_+$. Jest to spójna składowa grupy Lorentza. Należy zaznaczyć, że cała grupa Lorentza nie jest spójna (ani jednospójna). Łatwo zauważyć, że

$$k(-U) = k(U)\,,$$

a można też pokazać, że kwestia znaku jest jedyną niejednoznacznością przy wyborze U, jeśli dane jest k(U). W ten sposób pokazaliśmy, że ciąg homomorfizmów

$$\mathbf{Z}_2 \xrightarrow[i]{} \mathbf{SL}(2, \mathbf{C}) \xrightarrow[k]{} \mathbf{L}$$

jest dokładny. Oznaczyliśmy tu $\mathbf{Z}_2 = \{I, -I\}$ oraz i - naturalne włożenie $\mathbf{Z}_2$ w $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Inaczej mówiąc, $\mathbf{SL}(2,\mathbf{C})$ jest rozszerzeniem grupy $\mathbf{L}$. Grupa unimodularna jest, jak okazuje się, najmniejszym jednospójnym rozszerzeniem właściwej grupy Lorentza.

Omówiliśmy zatem izomorfizm między $(\mathbf{R}^4, \eta)$ a $\mathbf{H}$ oraz związek między grupami działającymi w tych przestrzeniach, tj. $\mathbf{L}$ oraz $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$.

Następnie wprowadzimy pojęcie p r z e s t r z e n i r z u t o w y c h i k w a d r y k r z u t o w y c h . Niech V oznacza przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych (można by tę definicję bez większych zmian przenieść na przestrzenie wektorowe nad ciałem liczb zespolonych). Niech $0 \neq v \in V$, to kierunkiem wektora v nazywamy

$$d(v) = \{\lambda v : 0 \neq \lambda \in \mathbf{R}\},$$

czyli do jednego kierunku zaliczymy wektory do siebie proporcjonalne. Zbiór kierunków $\mathbf{P}(V) = \{d(v) : 0 \neq v \in V\}$ nazywamy przestrzenią rzutową wyznaczoną przez V. Jeżeli w V dany jest iloczyn skalarny g, to możemy zdefiniować kwadrykę, czyli zbiór kierunkow zerowych, następująco:

$$\mathbf{P}(V) \supset \mathbf{N}(V) = \{d(v) : 0 \neq v \in V \text{ i } g(v, v) = 0\}.$$

Jeśli w szczególności weźmiemy $\mathbf{R}^4$ i η, to możemy utworzyć $\mathbf{N}(\mathbf{R}^4)$, biorąc zaś $\mathbf{H}$ i iloczyn skalarny generowany przez wyznacznik możemy skonstruować $\mathbf{N}(\mathbf{H})$. Odwzorowanie ε określa bijekcję $\mathbf{N}(\mathbf{R}^4) \longrightarrow \mathbf{N}(\mathbf{H})$. Zbadajmy strukturę zbioru $\mathbf{N}(\mathbf{H})$. Mamy $d(A) \in \mathbf{N}(\mathbf{H})$ wtedy i tylko wtedy, kie-

dy $0 \neq A = A^+$ oraz $\det A = 0$. Są zatem tylko dwie możliwości: albo

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 \end{pmatrix}, \text{ a stąd } A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ gdzie } 0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$$

albo

$$A = \lambda \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \text{ a stąd } A = \lambda \begin{pmatrix} \zeta\bar{\zeta} & \bar{\zeta} \\ \zeta & 1 \end{pmatrix}, \text{ gdzie } 0 \neq \lambda \in \mathbf{R}, \ \zeta \in \mathbf{C}$$

Gdy $\zeta \longrightarrow \infty$, wówczas macierz drugiego typu dąży do macierzy pierwszego typu (aby to sprawdzić, należy wybrać $\lambda = \lambda'/\zeta\bar{\zeta}$, gdzie $\lambda' = \text{const}$). Otrzymaliśmy zatem ciągłą bijekcję $\mathbf{N}(\mathbf{H}) \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, opisywaną przez

$$d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \infty, \quad d\begin{pmatrix} \zeta\bar{\zeta} & \bar{\zeta} \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \zeta .$$

Zauważmy jeszcze, że istnieje bijekcja dwuwymiarowej sfery S_2 na zbiór kierunków izotropowych $w(\mathbf{R}^4, \eta)$. Mianowicie, gdy $(x, y, z) \in S_2$ (tzn. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$), wówczas $d(1, x, y, z) \in \mathbf{N}(\mathbf{R}^4)$. Możemy dokonać złożenia trzech odwzorowań

$$S_2 \longrightarrow \mathbf{N}(\mathbf{R}^4) \longrightarrow \mathbf{N}(\mathbf{H}) \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}},$$

według następującego przepisu:

$$(x, y, z) \longmapsto d(1, x, y, z) \longmapsto d\begin{pmatrix} 1 + z & x - iy \\ x + iy & 1 - z \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x + iy}{1 - z} & z \neq 1 \\ \infty & z = 1 \end{cases} .$$

Widzimy więc, że złożenie to jest rzutem stereograficznym, jak to zasygnalizowaliśmy początkowo na diagramie.

Zastanowimy się teraz, jak wygląda działanie grupy $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ w $\mathbf{N}(\mathbf{H})$, a następnie, jak to działanie przenosi się do $\tilde{\mathbf{C}}$. Niech $U \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

oraz

$$A = \begin{pmatrix} \zeta\bar{\zeta} & \bar{\zeta} \\ \zeta & 1 \end{pmatrix}$$

czyli $d(A) \in \mathbb{N}(H)$. Zauważmy, że macierz A można zapisać w postaci iloczynu dwóch wektorów:

$$A = \begin{pmatrix} \zeta\bar{\zeta} & \bar{\zeta} \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ 1 \end{pmatrix}(\zeta, 1) = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

Działanie macierzy U na A możemy teraz sfaktoryzować:

$$UAU^T = U\begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix} U\left[\begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix}\right]^T ,$$

a zatem U działa tak:

$$U\begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\zeta + b \\ c\zeta + d \end{pmatrix} = (c\zeta + d)\begin{pmatrix} \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ gdy } c\zeta + d \neq 0$$

gdy zaś $c\zeta + d = 0$, wówczas

$$U\begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\zeta + b \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Widzimy więc, że macierz U indukuje w $\tilde{\mathbb{C}}$ odwzorowanie, j_U zwane homografią

$$j_U(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg dokładny homomorfizmów:

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow[i]{} SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow[j]{} PGL(2, \mathbb{C}) ,$$

gdzie przez $PGL(2, \mathbb{C})$ oznaczyliśmy grupę homografii (czyli grupę rzutową). Stąd łatwo wynikają izomorfizmy następujących grup:

$$L \longleftrightarrow PGL(2, \mathbb{C}) \longleftrightarrow \text{grupa konforemna sfery } S_2$$

oraz izomorfizmy przestrzeni, w których grupy te działają

(są one przestrzeniami jednorodnymi względem tych grup):

$$N(\mathbb{R}^4) \longleftrightarrow \tilde{\mathbb{C}} \longleftrightarrow S_2 \ .$$

W tym kontekście elementy przestrzeni $\mathbb{C}^2$ nazywają się spinorami.

Teraz już możemy odpowiedzieć na pytanie; jaki jest związek między obrazami na kliszach obserwatorów O i O'? Ponieważ obaj obserwatorzy są inercjalni, ich sfery niebieskie $N(\mathbb{R}^4)$ i $N(\mathbb{R}^4)'$ są ze sobą powiązane przekształceniem Lorentza. Przekształceniom tym odpowiadają przekształcenia konforemne klisz S_2 i S_2, otrzymywane za pomocą podanego schematu. Wnioskujemy zatem, że obraz okręgu na kliszy będzie zawsze okręgiem [2]. Zatem nie jest prawdą, jakoby koła roweru poruszającego się z dużą prędkością względem obserwatora wyglądały jak elipsy [3, 4].

Uzyskaliśmy dogodny sposób klasyfikowania przekształceń Lorentza. Mianowicie możemy to robić klasyfikując homografie. Zapytajmy: ile kierunków na stożku może być zachowanych przez przekształcenie Lorentza? Albo, co na jedno wychodzi, kiedy zachodzi równość

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \ .$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \ ,$$

którego wyróżnik

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$$

jest odpowiedzialny za liczbę zachowanych kierunków na stożku. Gdy $\Delta \neq 0$, zachowane są dwa kierunki. Gdy $\Delta = 0$, zachowany jest jeden kierunek, z wyjątkiem przypadku $b = c = 0$, $a = d = \pm 1$, kiedy to wszystkie kierunki są zachowane (generowane przekształcenie Lorentza jest wtedy tożsamością).

Literatura

1. FOCK W.A.: Tieoria prostranstwa,wriemieni i tiagotienia. Wyd. 2 uzup. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1961.
2. PENROSE R.: The apparent shape of a relativistically moving sphere. Proc. Cambridge Phil. Soc. 55, 1959, s. 137-139.
3. TERRELL J.: Invisibility of the Lorentz contraction.Phys. Rev. 116, 1959, s. 1041-1045.
4. WEISSKOPF V.F.: The visual appearance of rapidly moving objects. Phys. Today 13, 1960, s. 24-27.

VII. NEWTONOWSKA TEORIA GRAWITACJI I ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI

Przechodzimy do omówienia modeli czasoprzestrzeni uwzględniających zjawiska grawitacyjne. Dlaczego właśnie zjawiska grawitacyjne odgrywają rolę tak wyjątkową, że uwzględnia się je przy budowie modelu czasoprzestrzeni, podczas gdy zjawiska elektromagnetyczne lub jądrowe jak gdyby "nakładają się" na ten model? Na to pytanie próbowaliśmy już dać odpowiedź w rozdziale II. Obecnie zajmiemy się tym zagadnieniem bardziej szczegółowo. Na razie będziemy snuć rozważania na poziomie newtonowskim, bez uwzględniania wniosków płynących ze szczególnej teorii względności.

Wiadomo, że masa ciała występuje w trzech rolach, a mianowicie jako:

1) masa bezwładna m_I ,
2) czynna masa grawitacyjna m_{AG},
3) bierna masa grawitacyjna m_{PG}.

Masa bezwładna występuje po lewej stronie równań Newtona $m_I \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

Czynna masa grawitacyjna "wytwarza" potencjał grawitacyjny φ spełniający równanie

$$\Delta \varphi = 4\pi k m_{AG} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1(t)),$$

gdzie funkcja $\vec{r}_1(t)$ opisuje ruch ciała, k zaś jest stałą grawitacji. Równanie to jest równoważne równaniu

$$\varphi = -\frac{k m_{AG}}{r}$$

gdzie $r = |\vec{r} - \vec{r}_1|_h$.

Bierna masa grawitacyjna występuje w wyrażeniu na siłę

$$\vec{F} = -m_{PG} \operatorname{grad} \varphi .$$

Trzecie prawo dynamiki gwarantuje równość obu mas grawitacyjnych. Wynika z niego mianowicie, że

$$m^1_{AG} m^2_{PG} = m^1_{PG} m^2_{AG},$$

co można zapisać inaczej

$$\frac{m^1_{AG}}{m^1_{PG}} = \frac{m^2_{AG}}{m^2_{PG}} = \lambda = \text{const}.$$

Zaprzeczenie powyższego wniosku prowadziłoby do tego, że całkowity pęd układu złożonego z ciał 1 i 2 nie byłby zachowany. To, że stała λ może być różna od 1, nie jest istotne, gdyż można ją włączyć w stałą grawitacyjną. Mamy więc

$$m_{AG} = m_{PG} = m_G .$$

Masa grawitacyjna m_G odgrywa rolę podobną do roli naboju elektrycznego w elektrodynamice, toteż często mówi się o niej jako o naboju grawitacyjnym. Równość $m_I = m_G$ w istotny sposób odróżnia grawitację od elektrodynamiki. Równość ta jest faktem doświadczalnym, sprawdzonym z bardzo dużą dokładnością. W 1894 r. Eötvös osiągnął tu dokładność rzędu 10^{-8} (chociaż obecnie sądzi się, że jego pomiary były w istocie

nieco mniej dokładne), Dicke zaś wraz ze współpracownikami w 1964 r. osiągnął dokładność rzędu 10^{-10}.

Przyjęcie równości $m_I = m_G$ za ścisłą prowadzi do stwierdzenia, że równanie ruchu ciał w polu grawitacyjnym jest uniwersalne. Znaczy to, że dla dowolnego ciała jest spełniony związek

$$\ddot{\vec{r}} + \operatorname{grad} \varphi = 0 .$$

Wynika z tego, że wszystkie ciała spełniające takie same warunki początkowe poruszają się w polu grawitacyjnym jednakowo. Chcąc uwzględnić istnienie pola grawitacyjnego, musimy zmienić sformułowanie I zasady dynamiki. Powinniśmy mianowicie teraz powiedzieć, że istnieje wyróżniona klasa ruchów zwanych spadkami swobodnymi, układ odniesienia i funkcja φ takie, że równanie spadków swobodnych ma postać powyżej napisaną.

Z czym wiązała się afiniczność czasoprzestrzeni nie uwzględniającej zjawisk grawitacyjnych? Oczywiście z tym, że równanie ruchu cząstek swobodnych było postaci

$$\ddot{\vec{r}} = 0 ,$$

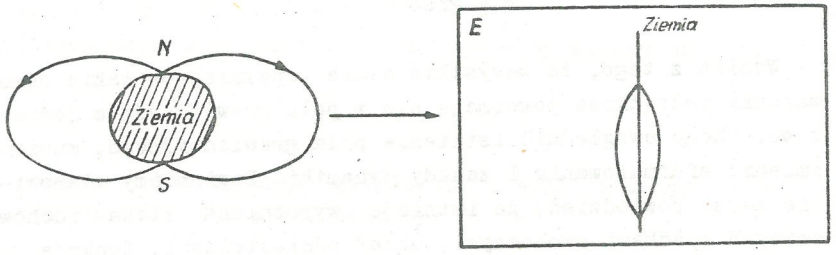
co jest równoważne równaniu prostych

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t .$$

Struktura afiniczna czasoprzestrzeni wiąże się ściśle z opisaną poprzednio interpretacją geometryczną ruchów swobodnych. Obecnie w związku ze zmienionym równaniem ruchu dla cząstek swobodnych można wątpić, czy czasoprzestrzeń da się zrealizować pod postacią przestrzeni afinicznej. Na przykład nie można teraz przyjąć, że spadkom swobodnym odpowiadają proste w E, bo łatwo jest podać przykład takich spadków, których linie świata przecinają się w więcej niż w jednym punkcie (rys. VII.1). (Nasuwa się tu myśl, aby utożsamiać linie świata swobodnych spadków z liniami ekstremalnymi odpowiedniej krzywej geometrii). Pozornie jest jeszcze inna możliwość ratowania afiniczności. Można przecież zgodzić się, aby

spadki swobodne były reprezentowane przez krzywe, prostym zaś aby odpowiadały inne, fikcyjne ruchy.

$$\ddot{\vec{r}} + \operatorname{grad}\varphi = 0 \longleftrightarrow \text{krzywe w } E\,,$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t \longleftrightarrow \text{proste w } E\,.$$



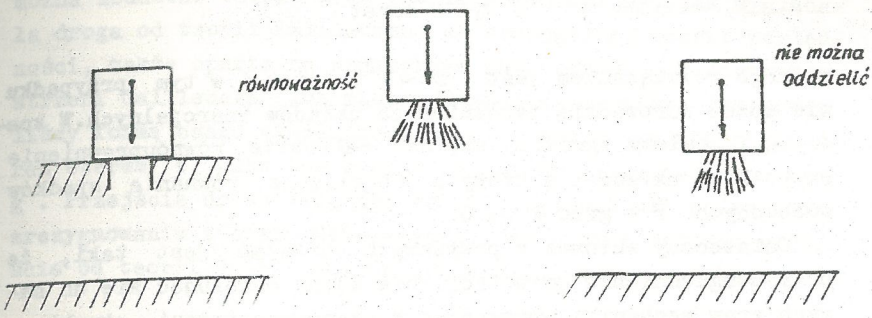
Rys. VII.1

Łatwo zauważyć jednak, że postać równania ruchu spadków swobodnych nie zmienia się, gdy dokona się przekształcenia

$$\vec{r} \longmapsto \vec{r} + \vec{a}(t)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi - \ddot{\vec{a}} \cdot \vec{r}$$

gdzie $\vec{a}(t)$ jest dowolną wektorową funkcją czasu. Po dokonaniu zatem powyższego przekształcenia liniowe związki w równaniu prostej przejdą , ze względu na dowolność funkcji $\vec{a}(t)$, w związki nieliniowe. Zdefiniowana w ten sposób struktura afiniczna czasoprzestrzeni nie byłaby niezależna od wyboru układu odniesienia.

Wzory na transformacje położenia i potencjału interpretuje się zwykle jako niemożność odróżnienia sił grawitacyjnych od sił bezwładności za pomocą eksperymentów lokalnych. Ilustruje się to za pomocą tzw. windy Einsteina (rys. VII.2).



Rys. VII.2

Obserwator zamknięty w spoczywającej windzie (w polu grawitacyjnym Ziemi) i obserwator znajdujący się w rakiecie poruszającej się ruchem jednostajnie przyspieszonym są w podobnej sytuacji. Taki zamknięty obserwator nie potrafi stwierdzić, w której z wymienionych sytuacji znajduje się. Własność równoważności sił grawitacyjnych i sił bezwładności jeszcze lepiej widać na przykładzie windy (lub rakiety) przyspieszanej w polu grawitacyjnym Ziemi. Obserwator dokonujący lokalnych eksperymentów nie jest w stanie oddzielić sił grawitacji od sił bezwładności.

Żądanie lokalności jest istotne. Odrzucając je można domagać się, aby potencjał φ znikał w dalekich odległościach od źródła pola grawitacyjnego, $\varphi \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$. Nie można tego, oczywiście, zrobić w zamkniętej windzie, gdyż wymaga to wprowadzenia układu inercjalnego, a więc przeprowadzenia doświadczeń i obserwacji zdarzeń na dużych odległościach od ciał wytwarzających pole.

Warunku znikania potencjału φ w nieskończoności nie można także spełnić w kosmologii, gdzie trzeba uwzględnić w przybliżeniu jednorodny rozkład materii w Wszechświecie.

Przyjmując, że gęstość masy jest w całym Wszechświecie stała, otrzymujemy na średni potencjał grawitacyjny równanie postaci

$$\Delta\varphi = \text{const}$$

którego rozwiązaniem jest $\varphi \sim r^2$. Zatem i w tym przypadku nie można wprowadzić wyróżnionych układów inercjalnych. W kosmologii należy zgodzić się na całkowite równouprawnienie wszystkich układów, w których obowiązuje równanie spadków swobodnych $\ddot{\vec{r}} + \text{grad}\,\varphi = 0$.

Ostateczny wniosek z powyższych rozważań jest taki, że przy uwzględnieniu grawitacji nie można odwołując się do samych praw mechaniki wprowadzić w czasoprzestrzeni struktury afinicznej. Innymi słowy, nie można wprowadzić układów inercjalnych. Podobnie do przypadku zasady względności zapostulujemy za Einsteinem, że nie można tego uczynić za pomocą żadnych eksperymentów, nie tylko eksperymentów mechanicznych. Uogólnienie to nie jest trywialne zważywszy, że zupełnie brak tu danych doświadczalnych.

Powyższą sytuację możemy zilustrować za pomocą tabelki:

	Fizyka Newtona	Fizyka Einsteina
Bez grawitacji	Za pomocą doświadczeń mechanicznych nie można wyróżnić żadnego spośród układów inercjalnych	Za pomocą żadnych doświadczeń nie można wyróżnić żadnego spośród układów inercjalnych
Z grawitacją	Za pomocą lokalnych doświadczeń mechanicznych nie można wprowadzić układów inercjalnych	Za pomocą żadnych lokalnych doświadczeń nie można wprowadzić układów inercjalnych

Przypominamy, że ważne jest tu podkreślenie lokalności, a w związku z tym teoria względności nie spełnia zasady Macha, której istota polega na stwierdzeniu ścisłego związku praw i zjawisk lokalnych z ruchem i rozkładem materii we Wszechświecie jako całości.

W jaki sposób na podstawie tego negatywnego stwierdzenia

można zbudować teorię grawitacji? Przypomnijmy, jak wyglądała droga od teorii Galileusza do szczególnej teorii względności, także oparta na negatywnym stwierdzeniu. W czasoprzestrzeni Galileusza (lub raczej Maxwella-Lorentza) dysponowaliśmy formą czasu absolutnego τ , iloczynem skalarnym h oraz eterem e albo też eterem e oraz iloczynem skalarnym g . Przejście do szczególnej teorii względności polegało na zrezygnowaniu z eteru.Schematycznie tak można zapisać przejście od teorii Galileusza do szczególnej teorii względności:

$$h, \tau, e \longleftrightarrow e, g \longrightarrow g .$$

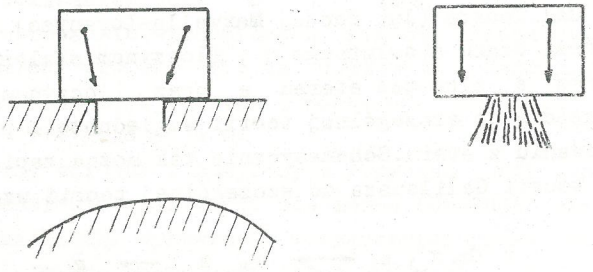
Teraz zanalizujemy inną część struktury czasoprzestrzeni. Okazuje się, że w przestrzeni afinicznej można wprowadzić pojęcie koneksji afinicznej Γ , przy czym nałożenie pewnych warunków na tę konekcję (żądanie płaskości) implikuje afiniczność czasoprzestrzeni. Ponieważ, jak to wyżej pokazywaliśmy, czasoprzestrzeń nie może być afiniczna,jeżeli uwzględnia się grawitację, rozsądnie będzie nie zakładać płaskości koneksji afinicznej. Sytuację tę można opisać za pomocą schematu analogicznego do poprzedniego

$$(E, V) \longleftrightarrow (E, \text{płaska } \Gamma) \longrightarrow (E, \Gamma) .$$

Nasuwa się tu pytanie: czy nie można by zrezygnować (albo ewentualnie dodać) z jeszcze jakichś elementów w strukturze czasoprzestrzeni, tzn. za pomocą strzałek przedłużyć ten schemat? Einstein chciał to zrobić, próbując budować wspólną teorię zjawisk grawitacyjnych i elektromagnetycznych. Postępowanie to jednak nie dało rezultatów,gdyż nie było jakichkolwiek faktów doświadczalnych, na których mogłoby się ono opierać.

Należy jeszcze zauważyć, że stwierdzenie lokalnej nierozróżnialności sił bezwładności od sił grawitacji ma ograniczoną stosowalność. Podczas spadku dwóch cząstek w windzie (rys. VII.3) tory ich będą się do siebie zbliżały,gdyż cząst-

ki będą poruszały się ku środkowi Ziemi, natomiast nie zaobserwuje się tego efektu w przypadku rakiety przyspieszanej.



Rys. VII.3

Przy przekształceniu

$$\varphi \longrightarrow \varphi - \vec{\ddot{a}}\,\vec{r}$$

mamy

$$\operatorname{grad}\varphi \longrightarrow \operatorname{grad}\varphi - \vec{\ddot{a}}\,,$$

ale drugie pochodne nie zmieniają się przy tym

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} \longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,.$$

Właśnie te drugie pochodne określają zbliżanie się do siebie cząstek, a wiadomo, że tylko w rzeczywistych polach grawitacyjnych drugie pochodne potencjału są różne od zera.

Postaramy się teraz powiedzieć, co to jest koneksja afiniczna w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej (E, V). Reper (ϑ, e_i) określa współrzędne prostoliniowe $\xi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ równaniem

$$p = \xi^i(p)e_i + \vartheta\,.$$

Współrzędne te nazywamy prostoliniowymi, gdyż ustalenie

$(n-1)$ spośród nich zadaje prostą w E. Dla krzywej $q : \mathbb{R} \longrightarrow E$ możemy napisać

$$q(\lambda) = q^i(\lambda)e_i + \vartheta .$$

Wektor styczny do krzywej q jest zadany równaniem

$$u(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \longrightarrow 0} \frac{q(\lambda + \Delta\lambda) - q(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{dq^i}{d\lambda} e_i .$$

Dla prostej sparametryzowanej afinicznie wektor styczny $u(\lambda)$ jest stały. Wprowadzimy teraz współrzędne krzywoliniowe w E. Niech odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem, czyli bijekcją taką, że f oraz f^{-1} są w sposób ciągły (dowolną liczbę razy) różniczkowalne. Określmy odwzorowanie $\bar{\xi} = f \circ \xi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Widać, że para $(E, \bar{\xi})$ jest mapą w E; $\bar{\xi}$ nazywamy układem współrzędnych krzywoliniowych w E. Rozpatrzmy i-tą linię układu współrzędnych $\bar{\xi}$, tzn. krzywą q_i, której obrazem w $\mathbb{R}^n$ jest

$$\bar{\xi}^j(q_i(\lambda)) = \begin{cases} \bar{\xi}^j_0 = \text{const} & \text{dla } j \neq i , \\ \lambda & \text{dla } j = i . \end{cases}$$

Należy tu uczynić pewną uwagę dotyczącą oznaczeń. Odwzorowanie

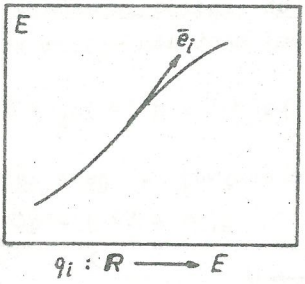
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwykle zapisujemy jako

$$\bar{x} = f(x) \quad \text{albo} \quad \bar{x} = \bar{x}(x) ,$$

natomiast odwzorowanie odwrotne f^{-1}

$$x = f^{-1}(\bar{x}) \quad \text{albo} \quad x = x(\bar{x}) ,$$



Rys. VII.4

Mamy

$$q_i(\lambda) = \xi^j(q_i(\lambda))e_j + \vartheta$$

ale $\xi = f^{-1} \circ \bar{\xi} = x \circ \bar{\xi}$, a więc

$$q_i(\lambda) = x^j \circ \bar{\xi} \quad (q_i(\lambda))e_j + \vartheta =$$

$$= x^j(\bar{\xi}^1_o, \ldots, \bar{\xi}^{i-1}_o, \lambda, \bar{\xi}^{i+1}_o, \ldots, \bar{\xi}^n_o)e_j + \vartheta ,$$

zatem wektor styczny do linii q_i (rys. VII.4) będzie równy

$$\bar{e}_i = \frac{dx^j}{d\lambda} e_j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} e_j .$$

e_i jest polem wektorowym określonym na E. Ponieważ f z założenia jest dyfeomorfizmem, więc $\det(\partial x^j / \partial \bar{x}^i) \neq 0$, a stąd $(\bar{e}_i(p))$ jest bazą w V wyznaczoną przez mapę $(E, \bar{\xi})$ (dla każdego punktu $p \in E$).

Dowolny wektor $v \in V$ możemy rozłożyć względem tej bazy

$$v = \bar{v}^i \bar{e}_i ,$$

(przy czym, jeśli v jest polem wektorowym $v : E \longrightarrow V$, to rozsądnie będzie rozkładać wektor v(p) względem bazy w punk-

cie $p \in E$). Z tego, że $v = v^i e_i$, oraz ze związku między e_i a $\bar{e}_i$ wynika równość

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j .$$

Widzimy, że przejściu od jednej mapy do drugiej (niekoniecznie od prostoliniowej do krzywoliniowej) odpowiada zmiana bazy w każdym punkcie rozmaitości E. Z kolei zmiana ta powoduje transformację współrzędnych wektorów zgodną z wyżej wypisanym wzorem. Okazuje się, że w podobny sposób transformują się inne obiekty geometryczne. Na przykład prawo transformacyjne dla tensorów dwukrotnie kontrwariantnych, służące niekiedy za ich definicję, ma postać

$$T^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl} .$$

Inaczej transformują się tensory dwa razy kowariantne, odgrywające rolę form liniowych nad przestrzenią tensorów dwukrotnie kontrawariantnych

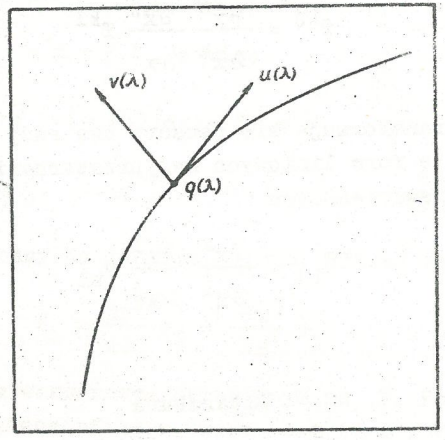
$$\bar{U}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} U_{kl} .$$

Literatura

1. RASZEWSKI P.K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa. PWN, Warszawa 1958.
2. TRAUTMAN A.: Foundations and current problems of general relativity. W: Lectures on general relativity. Prentice-Hall, New Jersey 1964.

VIII. PODSTAWY OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

Przypomnijmy, że równość mas, $m_I = m_G$, powodowała, iż nie można za pomocą doświadczeń mechanicznych (a według Einsteina żadnych) określić układów inercjalnych. Stwierdzenie to implikowało z kolei potrzebę rezygnacji z przestrzeni afinicznej jako modelu czasoprzestrzeni. Z drugiej strony wiadomo, że podstawowe prawa fizyki mają postać równań różniczkowych; własność tę nazywa się infinitezymalną lokalnością praw fizyki. Wynika z tego, że czasoprzestrzeń powinna być "infinitezymalnie afiniczna". Znaczy to, że w nowym modelu czasoprzestrzeni powinno być pozostawione z przestrzeni afinicznej to, co zapewnia możliwość różniczkowania.



Rys. VIII.1

Obecnie będziemy w dalszym ciągu analizować strukturę przestrzeni afinicznej (E, V), starając się w niej wyodrębnić tę "część infinitezymalną". Wprowadzimy pojęcie r ó ż n i c z k o w a n i a a b s o l u t n e g o w E. Niech $q : \mathbb{R} \longrightarrow E$ będzie krzywą w E, pole wektorowe zaś (określone tylko na tej krzywej) $u : \mathbb{R} \longrightarrow V$ niech będzie polem do niej stycznym (rys. VIII.1). Dla pola wektorowego

$v : \mathbb{R} \longrightarrow V$, określonego na tej krzywej, możemy wprowadzić pojęcie pochodnej absolutnej wzdłuż q

$$\frac{dv}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{v(\lambda + \Delta\lambda) - v(\lambda)}{\Delta\lambda} .$$

Definicja ta jest dobra, gdyż oba wektory $v(\lambda + \Delta\lambda)$ i $v(\lambda)$ należą do przestrzeni wektorowej V (na rozmaitościach nie posiadających struktury przestrzeni afinicznej różniczkowanie takie byłoby niewykonalne). Rozkładając wektor v kolejno względem baz (e_i) i $(\bar{e}_i)$, a następnie różniczkując otrzymujemy

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv^i}{d\lambda} e_i = \frac{d\bar{v}^i}{d\lambda} \bar{e}_i + \bar{v}^i \frac{d\bar{e}_i}{d\lambda} .$$

W powyższym wzorze uwzględniliśmy to, że pola wektorowe $\lambda \longmapsto e_i$ są stałe, pola zaś $\lambda \longmapsto \bar{e}_i$ są zmienne. Uwzględniając związek między wektorami bazy

$$\bar{e}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} e_j$$

otrzymujemy

$$\frac{d\bar{e}_i}{d\lambda} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} \frac{d\bar{x}^k}{d\lambda} e_j = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{u}^k \bar{e}_l ,$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\bar{\Gamma}^l_{ki} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}$$

Jak łatwo można przekonać się, liczby $\bar{\Gamma}^l_{ik}$ są wyznaczone przez układ współrzędnych $\bar{\xi}$, natomiast nie zależą od wyboru prostoliniowego układu współrzędnych ξ. $\bar{\Gamma}^l_{ki}$ interpretujemy jako l-tą składową (względem bazy $(\bar{e}_j)$) pochodnej

wektora $\bar{e}_i$ w kierunku k-tej linii układu współrzędnych $\bar{\xi}$. Możemy teraz zapisać składowe pochodnej absolutnej pola wektorowego v względem bazy $(\bar{e}_j)$, określone równaniem

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{D\bar{v}^i}{d\lambda}\,\bar{e}_i$$

za pomocą $\bar{\Gamma}$

$$\frac{D\bar{v}^i}{d\lambda} = \frac{d\bar{v}^i}{d\lambda} + \bar{\Gamma}^i_{lk}\bar{v}^l\bar{u}^k .$$

Ze względu na to, że w definicji $\bar{\Gamma}$ występują drugie pochodne współrzędnych x^j po $\bar{x}^i$, dochodzimy do wniosku, iż $\bar{\Gamma}^i_{lk} = 0$ wtedy i tylko wtedy, kiedy układ współrzędnych $\bar{\xi}$ jest prostoliniowy. Ta własność symboli $\bar{\Gamma}$ prowadzi do stwierdzenia, że nie są one tensorami. Istotnie, jeśli współrzędne tensora są równe zeru w pewnym układzie współrzędnych, to są one równe zeru w każdym układzie współrzędnych. Symbole $\bar{\Gamma}^i_{kl}$ tworzą tzw. obiekt geometryczny, zwany koneksją (lub powiązaniem) afiniczną albo obiektem przeniesienia równoległego. Ta ostatnia nazwa bierze się stąd, że w języku pochodnej absolutnej wektor v jest równolegle przenoszony wzdłuż krzywej q, gdy

$$\frac{dv}{d\lambda} = 0$$

albo inaczej

$$\frac{Dv^i}{d\lambda} = 0 .$$

Zatem w przestrzeni afinicznej (E, V) wydzieliliśmy obiekt koneksji afinicznej Γ, określający różniczkowanie absolutne. Przestrzeń afiniczna jest szczególnym przypadkiem p r z e s t r z e n i w y p o s a ż o n e j w k o n e k s j ę a f i n i c z n ą albo, krócej, przestrzeni z koneksją

$$(E, V) \longrightarrow (E, \Gamma) .$$

jest obiektem geometrycznym, który po przejściu od układu współrzędnych ξ - teraz nie jest to już układ prostoliniowy, gdyż to pojęcie nie jest dobrze określone w (E,Γ)- do układu $\bar{\xi}$ przekształca się w następujący sposób:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^l_{mn} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}$$

To prawo transformacyjne otrzymujemy w przestrzeni afinicznej, uogólniając je następnie na dowolną przestrzeń z koneksją.

Nasze poprzednie rozważania nasuwają myśl, żeby przyjąć czterowymiarową rozmaitość różniczkową E z obiektem koneksji afinicznej Γ za model czasoprzestrzeni uwzględniający zjawiska grawitacyjne.

W przestrzeni z koneksją afiniczną możemy za pomocą równania

$$\frac{Dv^i}{d\lambda} = \frac{dv^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk} v^j u^k$$

określić pochodną absolutną wektora v wzdłuż krzywej q, a co za tym idzie - wprowadzić pojęcie przesunięcia równoległego wektorów.

Pojęcie pochodnej absolutnej (i przesunięcia równoległego) można w prosty i naturalny sposób uogólnić na dowolne pola tensorowe, posługując się przy tym żądaniami liniowości tej pochodnej i spełniania przez nią warunku Leibniza; dla pól skalarnych pochodna absolutna równa się pochodnej zwykłej.

Następnie wprowadza się pojęcie p o c h o d n e j k o w a r i a n t n e j . Nazwę tę nosi tensor otrzymywany przez wzięcie pochodnych absolutnych w kierunku linii współrzędnych. Dla l-tej linii $u^k = \delta^k_l$, a zatem tensor pochodnej kowariantnej ma postać

$$\nabla_l v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{jl} v^j .$$

L i n i e g e o d e z y j n e są uogólnieniem prostych geometrii afinicznej. Przypominamy, że prostą opisywaliśmy równaniem

$$q(\lambda) = a(\lambda)w + \vartheta ,$$

gdzie $w \in V$, $\vartheta \in E$, natomiast a było dyfeomorfizmem $a : R \to R$ (wystarczy zażądać $a' > 0$). Wektor styczny do tej prostej

$$u(\lambda) = a'(\lambda)w ,$$

pochodna zaś wektora stycznego względem parametru λ jest proporcjonalna do niego samego

$$\frac{du}{d\lambda} = aw = \frac{a''}{a'} u = bu$$

albo inaczej

$$\frac{Du^i}{d\lambda} = bu^i .$$

Zauważmy jeszcze, że współczynnik b równa się zeru wtedy i tylko wtedy, kiedy $a(\lambda) = \mu\lambda + \nu$; mówimy wtedy, że λ jest parametrem afinicznym. Krzywe w przestrzeni z koneksją afiniczną, spełniające równanie

$$\frac{Du^i}{d\lambda} \equiv \frac{du^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = bu^i$$

nazywamy liniami geodezyjnymi. Linie te, jak widzimy, odgrywają w przestrzeniach z koneksją afiniczną taką samą rolę jak proste w przestrzeniach afinicznych. Tak samo jak tam, gdy $b = 0$, powiadamy, że parametr λ jest afiniczny. Nietrudno pokazać, że taki parametr zawsze istnieje oraz że, jeśli λ jest parametrem afinicznym, to także i jedynie $\mu\lambda + \nu$ jest takim parametrem.

W newtonowskiej teorii grawitacji równanie ruchu punktu materialnego ma postać

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \operatorname{grad}\varphi = 0 .$$

Równanie to możemy zapisać inaczej

$$\frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0$$

gdzie u jest wektorem stycznym do linii świata punktu materialnego, $u^i = (v_x, v_y, v_z, 1)$, natomiast spośród współczynników koneksji afinicznej różne od zera są jedynie współczynniki $\Gamma^\alpha_{44} = \partial\varphi / \partial x^\alpha$ dla $\alpha = 1, 2, 3$. Widzimy zatem, że linie świata punktów materialnych w teorii Newtona są geodezyjnymi w pewnej geometrii, czas absolutny t zaś jest parametrem afinicznym. Nierozdzielność sił grawitacji i sił bezwładności ma teraz swój wyraz w nietensorowym charakterze współczynników Γ^i_{jk}; w układzie nieinercjalnym będzie

$$\Gamma^i_{jk} u^j u^k \sim \text{grad}\,\varphi + \text{siła Coriolisa} + \text{siła odśrodkowa} + \ldots$$

W geometrycznym podejściu do zagadnienia ruchu w polu grawitacyjnym znika problem równości masy grawitacyjnej i masy bezwładnej. W równaniu linii geodezyjnych po prostu nie ma miejsca na oddzielne rozpatrywanie tych mas.

Kiedy przestrzeń z koneksją afiniczną (E, Γ) jest przestrzenią afiniczną? Jak powiedzieliśmy już przedtem, będzie tak wtedy, kiedy istnieje układ współrzędnych taki, że $\Gamma^i_{jk} = 0$. Z tego od razu wynika, że wielkość

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

która, jak wynika z prawa transformacyjnego dla współczynników Γ^i_{jk}, jest tensorem, musi znikać

$$S^i_{jk} = 0.$$

Tensor S nazywamy tensorem skręcenia. Warunkiem dostatecznym do afiniczności przestrzeni (E, Γ) jest całkowalność równania

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \bar{\Gamma}^i_{jk} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} ,$$

które wynika z prawa transformacyjnego na współczynniki koneksji afinicznej, jeśli położymy tam $\Gamma^i_{jk} = 0$. Gdy znika torsja, wówczas całkowalność tego równania zapewnia równość

$$R^i_{jkl} = 0 ,$$

gdzie

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl}$$

w dowolnym układzie współrzędnych. Wielkość R^i_{jkl} jest tensorem zwanym tensorem krzywizny albo tensorem Riemanna-Christoffela. Jeżeli uzupełni się te dwa warunki, a mianowicie znikanie tensora skręcenia i tensora krzywizny, warunkiem topologicznym mówiącym, że E powinna być homeomorficzna z R^4, to z tego będzie wynikało, że (E, Γ) jest przestrzenią afiniczną.

Przystosowując czasoprzestrzeń do tego, aby uwzględniała oddziaływania grawitacyjne, musimy zrezygnować przynajmniej z jednego z tych warunków. Ze względu na to, że skręcenie nie wpływa na równanie geodezyjnych, nie można go wykryć za pomocą prostych doświadczeń mechanicznych (a - jak się okazuje - i elektromagnetycznych) i dlatego zwykle przyjmuje się

$$S^i_{jk} = 0 .$$

W przestrzeniach afinicznych teorii Galileusza i szczególnej teorii względności mieliśmy takie elementy metryczne, jak h, τ oraz g. Były to pewne tensory w V, zatem wielkości stałe w E, a więc spełniały one równania

$$\nabla h = 0, \qquad \nabla \tau = 0, \qquad \nabla g = 0 .$$

W modelu ogólnej teorii względności będzie zatem rzeczą

naturalną pozostawienie warunku znikania pochodnej kowariantnej tensora metrycznego.

Trójkę (E, Γ, g), gdzie g jest dwukrotnie kowariantnym polem tensorowym na E, spełniającą warunki:

$$S^{i}_{jk} = 0, \qquad \nabla_i g_{jk} = 0$$

nazywa się g e o m e t r i ą R i e m a n n a. Nasze rozważania prowadzą do przypuszczenia, że ta właśnie geometria stanowi właściwy model czasoprzestrzeni w relatywistycznej teorii grawitacji. Okazuje się, że z wypisanych wyżej warunków wynika, iż współczynniki koneksji afinicznej, Γ^{i}_{jk}, które nazywa się w tym przypadku symbolami Christoffela i oznacza $\left\{ {i \atop jk} \right\}$, są równe

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) .$$

W geometrii Riemanna koneksja jest wyznaczona przez metrykę, więc w zasadzie powinniśmy mówić, że mamy parę (E, g), którą nazywamy geometrią Riemanna.

Z warunku $\nabla g = 0$ wynika, że długość łuku s, zdefiniowana równaniem

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j ,$$

jest parametrem afinicznym wzdłuż geodetyk. Ponadto okazuje się, że równanie geodetyk jest równoważne zasadzie wariacyjnej

$$\delta \int ds = 0 .$$

Widzimy więc, że geodetyki spełniają warunek konieczny do ekstremalności długości łuku.

Ograniczymy się teraz do czterowymiarowej przestrzeni Riemanna (E, Γ, g). Tak jak w szczególnej teorii względności będziemy zakładać, że tensor metryczny g ma sygnaturę $(+, -, -, -)$.

Narysujemy teraz schemat, który będzie ukazywał zależności między teoriami czasoprzestrzeni omawianymi w tym wykładzie.

Teoria Galileusza E, Γ, h, τ $S = 0,\ R = 0,\ \nabla h = 0,\ \nabla\tau = 0$	STW E, Γ, g $S = 0,\ R = 0,\ \nabla g = 0$
Teoria Newtona E, Γ, h, τ $S = 0,\ \nabla h = 0,\ \nabla\tau = 0$ $\mathrm{Tr}\, R \sim \varrho \iff \Delta\varphi = 4\pi k\varrho$ spadki swobodne $\longleftrightarrow$ geodezyjne	OTW E, Γ, g $S = 0,\ \nabla g = 0$ Równania pola grawitacyjnego? spadki swobodne $\longleftrightarrow$ geodezyjne czasowe promienie świetlne $\longleftrightarrow$ geodezyjne zerowe zegary idealne odmierzają s

W schemacie tym skrótami STW i OTW oznaczyliśmy odpowiednio szczególną i ogólną teorię względności. Tr R oznacza tensor, którego składowe R_{ij} są zadane równością

$$R_{ij} = R^{k}_{ijk},$$

a który zwie się tensorem Ricciego.

Należy tu zaznaczyć, że Einstein nie budował teorii grawitacji na poziomie newtonowskim, lecz szedł drogą od szczególnej teorii względności. Teoria Newtona w powyżej podanym sformułowaniu nie była wtedy znana. Być może, gdyby Einstein poprzedził budowę ogólnej teorii względności całkowitą geometryzacją teorii newtonowskiej, doszedłby do celu prędzej, niż to miało miejsce w rzeczywistości. Jeśli pominąć sprawę postaci równań pola grawitacyjnego, to wyżej podane sformuło-

wanie OTW jest zawarte w pracy napisanej przez Einsteina w 1913 r. wspólnie z matematykiem M. Grossmannem [3]. Natomiast równania pola mają dość długą i skomplikowaną historię.

Jak zapisać równania pola grawitacyjnego? Wiemy na razie tylko tyle, że równania te powinny w granicy nierelatywistycznej przechodzić w równania newtonowskiej teorii grawitacji. W teorii tej po prawej stronie równania mamy gęstość masy. Co będzie po prawej stronie równań OTW? Relatywistycznie masie odpowiada energia, a gęstości masy gęstość energii, która z kolei jest proporcjonalna do T_{44} - składowej tensora gęstości energii - pędu. Stąd bierze się pomysł, aby traktować tensor gęstości energii-pędu T_{ij} jako źródło pola grawitacyjnego. To, że w teorii newtonowskiej współczynniki koneksji afinicznej były proporcjonalne do pierwszych pochodnych potencjału φ, współczynniki te zaś są liniowymi kombinacjami pochodnych tensora metrycznego, skłania nas do przypuszczenia, iż powinniśmy traktować g_{ij} jako potencjały grawitacyjne.

Naturalnym uogólnieniem laplasjanu, występującego w teorii grawitacji Newtona, jest oczywiście dalambercjan, toteż lewa strona równań pola grawitacyjnego powinna zawierać $\Box g_{ij}$. Ponadto do tensora gęstości energii-pędu należy dodać człon uwzględniający energię i pęd samego pola grawitacyjnego; przez analogię do elektrodynamiki człon ten powinien być kwadratową funkcją pochodnych tensora metrycznego. Ostatecznie możemy symbolicznie zapisać proponowane przez Einsteina w 1913 i 1914 r. równanie pola grawitacyjnego w taki sposób [2, 3]

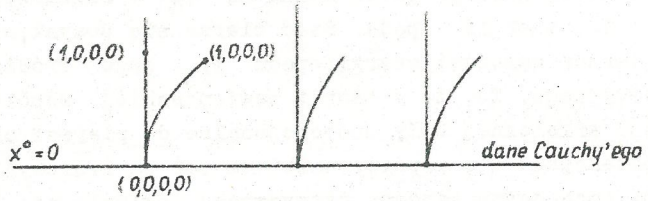
$$\Box g_{ij} = \varkappa T_{ij} + (\partial g/\partial x)^2_{ij} .$$

Ze względu na występowanie pierwszych pochodnych (a również dalambercjanu) równania te nie są tensorowe; rzeczywiście, jak okazuje się, z pierwszych pochodnych tensora metrycznego nie można utworzyć żadnego tensora. Znaczy to, że równania te będą spełnione tylko w pewnych układach współrzęd-

nych. Tensorową postać równań, którą możemy symbolicznie zapisać jako

$$\text{tensor}\,(G_{ij}) = \varkappa T_{ij}\,.$$

Einstein początkowo odrzucał, posługując się przy tym argumentem o przyczynowości. Ponieważ te równania są tensorowe, więc dowolne przekształcenie współrzędnych przekształca rozwiązania tych równań w pewne inne rozwiązania.



Rys. VIII.2

Przypuśćmy teraz, że mamy na hiperpowierzchni $x^0 = 0$ zadane dane Cauchy'ego. Ponieważ równania pola grawitacyjnego są hiperboliczne, dane początkowe powinny wyznaczyć takie wielkości jak gęstość materii lub skalar krzywizny (Ricciego) w punktach zorientowanych przyszłościowo. Niech na przykład punkt (0, 0, 0, 0) leży na tej samej linii świata materii co punkt (1, 0, 0, 0). Dokonajmy teraz transformacji współrzędnych takiej, żeby redukowała się do tożsamości w otoczeniu powierzchni $x^0 = 0$. W ten sposób otrzymamy inne rozwiązanie tych samych równań pola, lecz teraz już punkt (1, 0, 0, 0) leżący stale na tej linii świata co punkt (0, 0, 0, 0) znajdzie się w innym miejscu (rys. VIII.2), natomiast w tym poprzednim punkcie wartość np. gęstości materii będzie na ogół inna. A więc nie możemy na podstawie równań tensorowych przewidzieć, jaka będzie gęstość materii w

punkcie, powiedzmy, za godzinę, co "oczywiście" te równania dyskwalifikuje [2].

Rozumowanie powyższe nie jest słuszne zważywszy, że same współrzędne nie mają fizycznego znaczenia, lecz ma je jedynie punkt w czasoprzestrzeni. Przez dowolne przekształcenie współrzędnych wartość gęstości energii lub skalara krzywizny nie ulega zmianie, to zaś, że ten sam punkt będzie miał teraz inne współrzędne w nowym układzie, nikogo specjalnie nie powinno dziwić. Ten błędny argument był używany przez Einsteina aż do 1915 r., kiedy uznał on, że wręcz przeciwnie - równania pola powinny mieć ogólnie niezmienniczy, czyli tensorowy, charakter [4, 5]. Przyjmując ten punkt widzenia, dochodzimy do wniosku, że nie istnieją układy wyróżnione, a grupą automorfizmów OTW jest grupa dowolnych przekształceń współrzędnych.

W 1915 r. Einstein zapostulował [5] równanie

$$R_{ij} = \varkappa T_{ij} .$$

Równanie to, ze względu na uogólnione prawo zachowania energii-pędu $\nabla_j T^{ij} = 0$, narzuca dodatkowy różniczkowy warunek na tensor Ricciego i powoduje "nadoznaczoność" układu równań pola grawitacyjnego. Z tego powodu Einstein pod koniec 1915 r. zastąpił te równania równaniem

$$G_{ij} = \varkappa T_{ij} ,$$

gdzie $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$, natomiast $R = R^i_i$ - skalar krzywizny (Ricciego) [1]. Teraz już równość $\nabla_j T^{ij} = 0$ jest wręcz wnioskiem z tak zwanej tożsamości Bianchiego:

$$\nabla_j G^{ij} = 0 .$$

Ta sytuacja specjalnie nas nie dziwi, gdyż jest podobna do sytuacji w elektrodynamice. Tutaj z równań Maxwella

$$\nabla_j F^{ij} = 4\pi j^i,$$

po uwzględnieniu tożsamosci

$$\nabla_i \nabla_j F^{ij} = 0,$$

wynikającej z antysymetrii tensora pola elektromagnetycznego F^{ij}, otrzymujemy równanie ciągłości wektora gęstości prądu

$$\nabla_k j^k = 0,$$

czyli prawo zachowania ładunku.

Równania $G_{ij} = \varkappa T_{ij}$ jak wszystkie podstawowe równania fizyki wynikają z pewnej zasady wariacyjnej. Ma ona w tym przypadku postać

$$\delta \int \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\varkappa} R \right) d\omega = 0 ,$$

gdzie $d\omega$ jest czteroformą objętości, $\mathcal{L}$ zaś niezmienniczym lagrangianem materii. Do ustalenia pozostaje wartość współczynnika $\varkappa$. Aby przy przejściu do małych prędkości uzyskać zgodność z teorią Newtona, należy położyć

$$\varkappa = 8\pi k/c^4$$

Literatura

1. EINSTEIN A.: Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 48, 1915 s. 844-847.
2. EINSTEIN A.: Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 47, 1914 s. 1030-1085.
3. EINSTEIN A. (z M. Grossmannem): Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation. Z. Math. u. Phys. 62, 1913, s. 225-261.

4. EINSTEIN A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys. 49, 1916, s. 769-822.
5. EINSTEIN A.: Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 44, 1915, s. 778-786.

IX. NIEKTÓRE ZAGADNIENIA OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

Sformułowana w poprzednim rozdziale ogólna teoria względności nie wyróżnia żadnych układów odniesienia. Równania tej teorii mają postać tensorową. Gdy mamy rozwiązanie tych równań w pewnym układzie współrzędnych, a następnie przetransformujemy je do innego układu, wówczas przetransformowane rozwiązanie spełnia wyjściowe równanie wyrażone w nowym układzie współrzędnych. Powyższa własność ogólnej teorii względności bywa nazywana zasadą ogólnej niezmienniczości. Inaczej można ją sformułować następująco: grupą symetrii ogólnej teorii względności jest pełna grupa dyfeomorfizmów czasoprzestrzeni

Co nazywa się grupą symetrii teorii fizycznej? W każdej teorii możemy wyróżnić elementy absolutne i elementy dynamiczne. Te ostatnie służą do opisu historii układu fizycznego i w przeciwieństwie do pierwszych podlegają zmianom podczas ruchu. Grupą symetrii teorii fizycznej nazywa się grupę automorfizmów elementów absolutnych tej teorii. Na kilku przykładach pokażemy, jak przebiega granica podziału między elementami absolutnymi a elementami dynamicznymi oraz jak wyglądają grupy symetrii [1, 2].

Jako pierwszy przykład weźmy mechanikę Newtona, w której mamy do czynienia z następującymi elementami:

(E, V, h, τ ; współrzędne cząstek, gęstości, ciśnienia, ...).
absolutne dynamiczne

Tu grupą automorfizmów elementów absolutnych jest grupa Galileusza.

Inny, bardziej szczególny problem to klasyczne zagadnienie jednego ciała. Oprócz wyżej podanych elementów absolutnych wchodzą tu jeszcze dwa, a mianowicie: układ, w którym ciało to spoczywa (eter tego ciała e) i siła, z jaką ciało to oddziałuje na inne, scharakteryzowana potencjałem, np. grawitacyjnym $V = \alpha/r$:

$$(E,\ V,\ h, \tau,\ V = \alpha/r,\ e;\ \text{współrzędne cząstki}).$$
$$\text{absolutne} \qquad\qquad \text{dynamiczne}$$

Grupa automorfizmów w zagadnieniu jednego ciała składa się z grupy obrotów w przestrzeni trójwymiarowej oraz z przesunięć czasu.

W szczególnej teorii względności mamy sytuację podobną do newtonowskiej mechaniki:

$$(E,\ V,\ g;\ \text{linie świata punktów, pole elektromagnetyczne}, \ldots),$$
$$\text{absolutne} \qquad\qquad \text{dynamiczne}$$

grupą symetrii zaś jest tu, oczywiście, grupa Poincarégo.

W teoriach kwantowych sytuacja niewiele się zmienia. Weźmy kwantową teorię pewnego ustalonego układu charakteryzowanego przez przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ i hamiltonian $\hat{H}$. Mamy tu następujące elementy:

$$(\mathcal{H},\ \hat{H};\ \text{historia stanów układu}).$$
$$\text{absolutne} \qquad\qquad \text{dynamiczne}$$

Grupą automorfizmów jest teraz zbiór unitarnych operatorów w przestrzeni $\mathcal{H}$, które komutują z hamiltonianem.

We wszystkich wymienionych przypadkach grupa symetrii jest grupą Liego, zwłaszcza działania są tu ciągłe i grupy te posiadają skończony wymiar. Odmiennie jest w ogólnej teorii względności:

$$(E;\ g,\ \text{pole elektromagnetyczne, pole prędkości materii}, \ldots).$$

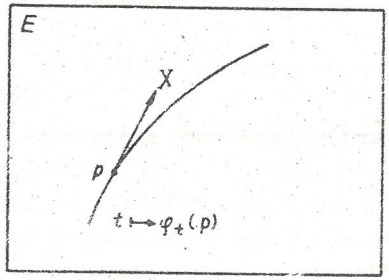
Jednym elementem absolutnym jest tu sama "goła" czaso-

przestrzeń E. Iloczyn skalarny g podlega równaniu Einsteina, a więc nie jest elementem absolutnym.

Grupą symetrii jest pełna grupa automorfizmów rozmaitości E, która nie jest grupą Liego. Niektórzy fizycy, wśród których należy wymienić Focka, uważają powyższą sytuację za niezadowalającą. Fock proponuje wprowadzenie w czasoprzestrzeni drugiej płaskiej metryki η jako elementu absolutnego:

$$(E, \eta\ ;\quad g, \text{ jak wyżej}).$$
$$\text{absolutne} \qquad \text{dynamiczne}$$

Iloczyn skalarny η ma być określony przez wyróżnienie pewnej klasy układów zwanych harmonicznymi i odgrywających rolę układów inercjalnych. Wydaje się, że taka dwumetryczna teoria nie jest najlepsza, ponieważ trudno podać fizyczną interpretację metryki η (albo, co na jedno wychodzi, odpowiadających jej układów inercjalnych).



Rys. IX.1

Obecnie zajmiemy się konsekwencjami występowania symetrii i ogólnej niezmienniczości. Wprowadzimy w związku z tym pojęcia jednoparametrowych grup przekształceń i pochodnej Liego.

Niech E będzie rozmaitością różniczkową (później czasoprzestrzenią) i niech będzie dane różniczkowalne odwzorowanie

$$\mathbb{R} \times E \ni (t, p) \longmapsto \varphi_t(p) \in E,$$

spełniające warunki:

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}_E .$$

Zbiór funkcji $\{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$, spełniających te warunki, nazywa się j e d n o p a r a m e t r o w ą g r u p ą p r z e k s z t a ł c e ń E. Łatwo zauważyć, że

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t},$$

a z tego widać, iż zbiór ten jest podgrupą grupy dyfeomorfizmów rozmaitości E.

Mając zadaną pewną grupę przekształceń w E, możemy za jej pomocą przesuwać funkcje, pola wektorowe, pola form różniczkowych i inne pola tensorowe na E. Gdy $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, wówczas funkcję przesuniętą określa się równaniem

$$f_t = f \circ \varphi_t .$$

Różniczki funkcji przesuwamy zgodnie z równością

$$(df)_t = d(f_t)$$

a następnie uogólniamy tę definicję na dowolne formy różniczkowe. Aby przesunąć pole wektorowe Y, używamy równania

$$\langle Y_t, df_t \rangle = \langle Y, df \rangle$$

Uogólnienie na dowolne pola tensorowe, którego nie będziemy tu podawać, nie jest trudne.

Przez każdy punkt $p \in E$ możemy przeprowadzić krzywą $t \longmapsto p(t)$, zdefiniowaną równaniem

$$p(t) = h_t(p) .$$

Krzywa ta nazywa się o r b i t ą punktu p, generowaną przez jednoparametrową grupę przekształceń, zbiór zaś orbit wszystkich punktów E składa się z t r a j e k t o r i i tej grupy. Przez każdy punkt $p \in E$ przechodzi dokładnie jedna trajektoria. Pole wektorowe X, styczne do wszystkich trajektorii grupy, nazywa się p o l e m i n d u k o w a n y m p r z e z t ę g r u p ę (rys. IX.1).

P o c h o d n ą L i e g o pola tensorowego ψ względem X nazywamy wyrażenie

$$\underset{X}{\pounds}\psi = -\frac{d}{dt}\,\psi_t\Big|_{t=0},$$

które jest polem tensorowym o takiej samej walencji jak pole wyjściowe ψ. Znikanie pochodnej Liego pola ψ,

$$\underset{X}{\pounds}\psi = 0,$$

jest równoważne stałości pola ψ na trajektoriach grupy:

$$\psi_t = \psi$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Niech będzie pewna teoria fizyczna $(E, \omega; \psi)$, w której E jest czasoprzestrzenią, ω opisuje różne od E elementy absolutne, ψ zaś opisuje elementy dynamiczne. Niech równania dynamiczne tej teorii wynikają z zasady wariacyjnej

$$\delta \int_{\Omega} \lambda = 0,$$

gdzie $\Omega \subset E$ jest obszarem i wariacje ψ znikają na jego brzegu:

$$\delta\psi\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Z tej zasady wariacyjnej wynikają równania pola wielkości χ, które symbolicznie zapiszemy $\Psi = 0$.

Czteroforma λ zależy od ψ i od ω. Dowodzi się ogólnej tożsamości

$$\underset{X}{\pounds}\lambda = \Omega\,\underset{X}{\pounds}\omega + \Psi\,\underset{X}{\pounds}\psi + d\chi,$$

gdzie χ jest pewną trójformą. Ponadto, wobec tego, że λ jest czteroformą, a więc $d\lambda = 0$, mamy

$$\pounds_X \lambda = d(X \lrcorner \lambda) .$$

Jeżeli elementy absolutne ω są stałe wzdłuż trajektorii pola X:

$$\pounds_X \omega = 0,$$

oraz są spełnione równania dynamiczne

$$\Psi = 0 ,$$

wynika z tego prawo zachowania wielkości $\chi - X \lrcorner \lambda$:

$$d(\chi - X \lrcorner \lambda) = 0 .$$

Zwykle równanie $\pounds_X \omega = 0$ określa pewną skończeniewymiarową algebrę Liego pól wektorowych na E, które są styczne do trajektorii grupy automorfizmów elementów absolutnych, czyli do grupy symetrii danej teorii fizycznej. Każdej grupie symetrii odpowiada pewne prawo zachowania.

Szczególna sytuacja powstaje w ogólnej teorii względności, gdzie nie ma elementów absolutnych prócz E, i równanie $\pounds_X \omega = 0$ jest spełnione przez dowolne pole wektorowe X, co odpowiada zasadzie ogólnej niezmienniczości. Mamy w tym przypadku tożsamość

$$\Psi \pounds_X \psi = d(X \lrcorner \lambda - \chi) .$$

Jeżeli pole X znika na brzegu obszaru Ω

$$X\big|_{\partial\Omega} = 0 ,$$

to posługując się twierdzeniem Stokesa otrzymujemy (χ znika na $\partial\Omega$)

$$\int_\Omega \Psi \pounds_X \psi = 0 ,$$

z tego zaś wynikają tzw. uogólnione tożsamości Bianchiego. Przykładowo w teorii grawitacji mają one postać

$$\nabla_j G^{ij} = 0 ,$$

a w elektrodynamice

$$\nabla_j (\nabla_k F^{kj}) = 0 .$$

Struktura logiczna ogólnej teorii względności jest nieco inna niż struktura innych klasycznych teorii pola. Weźmy jako przykład elektrodynamikę. Tu z równań Maxwella i z równań ruchu wynikają prawa zachowania energii i pędu wyrażone równaniem

$$\nabla_j T^{ij} = 0 .$$

Inaczej jest w teorii grawitacji. Tu z równań Einsteina

$$G^{ij} = \varkappa T^{ij},$$

po uwzględnieniu tożsamości $\nabla_j G^{ij} = 0$ wynikają prawa zachowania

$$\nabla_j T^{ij} = 0 ,$$

a z tego, jak się okazuje, równanie ruchu cząstek. Pokażemy przykładowo, jak wygląda wynikanie równań ruchu z równań Einsteina dla idealnego pyłu, tj. dla układu nie oddziałujących ze sobą cząstek, których tensor energii-pędu ma postać

$$T^{ij} = c^2 \varrho u^i u^j .$$

ϱ jest gęstością pyłu, u^i zaś współrzędnymi pola czteroprędkości. Prawo zachowania energii-pędu, wynikające z równań Einsteina, ma postać

$$0 = \nabla_j (\varrho u^i u^j) = u^i \nabla_j (\varrho u^j) + \varrho u^j \nabla_j u^i .$$

Zauważmy, że drugi składnik w tym wzorze zawiera czynnik równy pochodnej absolutnej czteroprędkości wzdłuż linii świata pyłu

$$u^j \nabla_j u^i = Du^i/ds .$$

Ponieważ czterowektor prędkości jest jednostkowy

$$u_i u^i = 1 ,$$

więc różniczkując tę równość wzdłuż linii świata pyłu otrzymujemy

$$u_i \frac{Du^i}{ds} = 0 .$$

Mnożąc równość wyrażającą prawo zachowania energii-pędu przez u^i, dostajemy

$$\nabla_j(\rho u^j) = 0 ,$$

czyli równanie ciągłości wyrażające prawo zachowania masy. Ponadto, wracając do równania wyjściowego, mamy

$$\frac{Du^i}{ds} = 0 ,$$

a więc równanie ruchu cząstek swobodnych.

Okazuje się, iż przedstawiona wyżej sytuacja dla idealnego pyłu nie jest bynajmniej przypadkowa. Duży wkład w zrozumienie tego, w jaki sposób w ogólnej teorii względności równania ruchu wynikają z równań pola, wnieśli polscy fizycy. Obszerne omówienie wyników warszawskiej szkoły Leopolda Infelda można znaleźć w monografii [6], a także w pracach [2, 5, 8, 9, 12, 14, 15]. Czesław Jankiewicz [7] pokazał, że wynik ten wiąże się z tym, iż w zasadzie wariacyjnej, prowadzącej do równań Einsteina, żąda się ekstremalizacji działania ze względu na zmiany 10 funkcji g_{ij}, z których tylko 6 opisuje geometrię czasoprzestrzeni, 4 zaś pozostałe zależą od wyboru układu współrzędnych. Na przykład w dwu wymiarach formy różniczkowe

$$dx^2 + dy^2 \qquad \text{oraz} \qquad x^2\,dx^2 + dy^2$$

opisują tę samą płaską geometrię. Mamy więc 6 stopni swobody opisujących geometrię i 4 stopnie swobody związane ze zmia-

nami układów współrzędnych. Przy wariowaniu działania dokonujemy wariacji linii świata współrzędnych, a to wiąże się z wynikaniem równań ruchu z równań pola [13] .

W elektrodynamice można zapostulować postać pola elektromagnetycznego i znaleźć ruch ładunków w tym dowolnie zadanym polu. Można też czynić odwrotnie: mając dany ruch ładunków - znaleźć pole. Możliwości te istnieją ze względu na to, że równania ruchu i równania pola są niezależne. Natomiast w ogólnej teorii względności postępowanie takie jest niewykonalne ze względu na to, że równania ruchu wynikają z równań pola. Powoduje to komplikacje: musimy rozwiązywać równania ruchu i równania pola jednocześnie. W ogólnym przypadku ścisłe rozwiązanie zagadnienia ruchu jest niewykonalne. Przybliżoną procedurę określania linii świata materii, polegającą na rozwijaniu wszelkich funkcji występujących w równaniach pola względem ujemnych potęg prędkości światła, podali Einstein, Infeld i Hoffmann [3], a niezależnie od nich Fock [4]. Metodę tę, zwaną metodą EIH, znacznie uprościli Jerzy Plebański i Stanisław Bażański [10].

Pokażemy obecnie, w jaki sposób można wyznaczyć stałą $\varkappa$ występującą w równaniach Einsteina. Rozważmy słabe pole grawitacyjne, któremu odpowiadają niewielkie krzywizny, i zajmijmy się niezbyt szybkimi ruchami, tzn. $\frac{v}{c} << 1$. Wtedy w równaniu linii geodezyjnych

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

można dokonać szeregu przybliżeń. Po pierwsze, położymy

$$ds \cong c\, dt ,$$

a z tego wynika, że

$$\frac{dx^i}{ds} \cong (1, \frac{\vec{v}}{c}) .$$

Dalej, pomijając wyrazy pierwszego rzędu w v/c mamy

$$\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \cong \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(2 \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) .$$

Wobec powolności ruchów stosunek pochodnych czasowych do pochodnych przestrzennych jest rzędu $\frac{v}{c} \ll 1$, a uwzględniając słabość pola grawitacyjnego

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \text{małe poprawki},$$

bez trudu otrzymujemy

$$\Gamma^{i}_{00} \cong \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

Równanie linii geodezyjnych przybiera wobec tego przybliżoną formę

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0 \\ \dfrac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + c^2 \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Przez porównanie z klasycznym równaniem newtonowskim

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = 0$$

otrzymujemy przybliżony wynik

$$g_{00} \cong 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \ ,$$

a ponadto stwierdzamy, że teoria newtonowska dopuszcza tylko pola statyczne

$$\partial \varphi / \partial t = 0 \ .$$

Równanie Einsteina

$$G_{ij} = \varkappa T_{ij}$$

w przypadku idealnego pyłu

$$T_{ij} = \varrho c^2 u_i u_j$$

daje

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varkappa c^4 \varrho .$$

Przez porównanie z klasycznym równaniem

$$\Delta\varphi = 4\pi k\varrho$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\varkappa = 8\pi k/c^4 .$$

Literatura

1. ANDERSON J.L.: Principles of relativity physics.Academic Press, New York 1967.
2. BAŻAŃSKI S.: The equation of motion of charged particles in general relativity. Acta Phys. Polon. 15,1956,s. 363.
3. EINSTEIN A., INFELD L., HOFFMANN B.: The gravitational equations and the problem of motion. Ann. Math. 39,1958, s. 65.
4. FOCK V.A.: Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne. J. Phys. (Moskwa) 1, 1939, s. 81.
5. INFELD L.: On the motion of bodies in general relativity theory. Acta Phys. Polon. 13, 1954, s. 187.
6. INFELD L.; PLEBAŃSKI J.: Motion and relativity. Pergamon Press-PWN, Oxford-Warszawa 1960.
7. JANKIEWICZ C.: Über den Zusammengang der Bewegungsgleichungen. Acta Phys. Polon. 18, 1959, s. 21.
8. MICHALSKA R.: Action principle for the motion of rotating bodies in the general theory of relativity.Bull.Acad. Polon. Sci. Ser. nauk matem.,astr. i fiz. 8,1960, s. 237 -246.
9. MICHALSKA R.: The equations of motion of rotating oblate bodies in the general relativity theory.Bull. Acad. Polon. Sci Ser. nauk matem., astr. i fiz. 8, 1960, s. 247.

10. PLEBAŃSKI J., BAŻAŃSKI S.: The general Fokker action principles and its application in general relativity theory. Acta Phys. Polon. 18, 1959, s. 307.
11. TRAUTMAN A.: Obszczaja tieoria otnositielnosti. Usp. Fiz. Nauk 89, 1966, s. 3-33.
12. TRAUTMAN A.: On gravitational radiation damping. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. nauk matem., astr. i fiz. 6,1958, s. 627.
13. TRAUTMAN A.: Propriétés d'invariance des théories physiques. Collège de France Paris 1963.
14. TULCZYJEW W.: Motion of multipole particles in general relativity theory. Acta Phys. Polon. 18, 1959, s. 393.
15. TULCZYJEW W.: Equations of motion of rotating bodies in general relativity theory. Acta Phys. Polon. 18, 1959, s. 37.

X. PRZEGLĄD ZJAWISK PRZEWIDYWANYCH PRZEZ TEORIĘ GRAWITACJI EINSTEINA

Poglądy, które w obecnym rozumieniu składają się na ogólną teorię względności, można uszeregować w trzech grupach.

1. Założenie, że czasoprzestrzeń jest rozmaitością różniczkową Riemanna o wymiarze równym 4 i sygnaturze (+,-,-,-). Interpretacja długości łuku s jako czasu mierzonego przez zegary idealne. Interpretacja geodezyjnych czasowych jako linii świata ruchów swobodnych, geodezyjnych zerowych zaś jako promieni świetlnych. Do tego dochodzi jeszcze "zasada minimalnego sprzężenia grawitacyjnego", która ustala, jak wyglądają równania pól lub równania cząstek w ogólnej teorii względności. Według tej zasady mianowicie należy wziąć równania słuszne w szczególnej teorii względności, zapisać je kowariantnie (tzn. tak, aby postać tych równań nie zależała od wyboru układu odniesienia), a następnie przyjąć taką samą

postać równań w ogólnej teorii względności. Przepis ten nie zawsze stanowi jednoznaczną receptę na konstrukcję równań dynamicznych. Weźmy na przykład równania Maxwella:

$$\nabla_j F^{ij} = \frac{4\pi}{c} j^i, \qquad \nabla_{[i} F_{jk]} = 0$$

W szczególnej teorii względności równania te są równoważne równaniom względem czteropotencjału:

$$\Box A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad \nabla_i A^i = 0,$$

ale w czasoprzestrzeni niepłaskiej te dwa zespoły równań nie są równoważne. W ogólnej teorii względności przyjmuje się, że pole elektromagnetyczne jest opisywane przez pierwszy układ równań, m. in. dlatego, iż układ ten wynika z odpowiedniej zasady wariacyjnej.

2. Zasada ogólnej niezmienniczości, którą można wypowiedzieć w następującej formie: pole g_{ij} wystarcza do opisu stosunków czasoprzestrzennych oraz pola grawitacyjnego i podlega równaniom dynamicznym. W związku z tym nie ma, poza samą czasoprzestrzenią, elementów absolutnych.

3. Równania Einsteina

$$G_{ij} = \varkappa T_{ij}$$

Pewne wnioski można wyprowadzić tylko na podstawie pierwszej grupy założeń. Należy do nich postać metryki dla słabego pola grawitacyjnego, otrzymana w poprzednim rozdziale

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Na tej samej podstawie otrzymuje się "grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni", tzn. zjawisko zmiany częstości światła rozchodzącego się w polu grawitacyjnym.

Zgodnie z postulatami grupy pierwszej, światło rozchodzi

się po geodetykach zerowych. Jak je znajdować? Niech Ψ spełnia równanie

$$g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0$$

oraz niech

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \neq 0 .$$

Wtedy krzywa $\lambda \longmapsto x^i(\lambda)$ spełniająca równanie

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j}$$

jest geodetyką zerową zawartą w hiperpowierzchni $\Psi = \text{const}$.

Weźmy stacjonarne pole g_{ij}, czyli takie pole, że w pewnym układzie odniesienia

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 0 ,$$

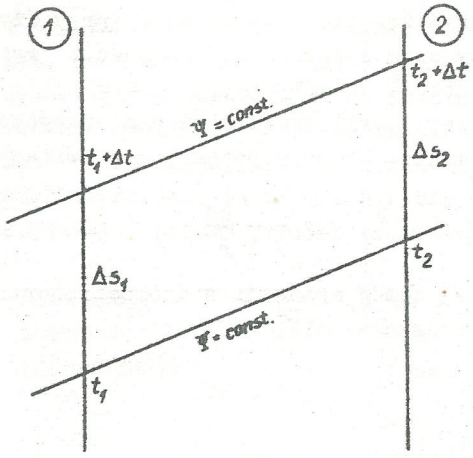
gdzie $ct = x^0$. W stacjonarnym polu istnieją rozwiązania

$$\Psi(x^i) = -\Omega t + \Phi(x^\alpha)$$

poprzednio wypisanego równania. Wyobraźmy sobie dwóch obserwatorów "spoczywających", to znaczy takich, dla których $x^1, x^2, x^3 = \text{const}$. Niech obserwator 1 wysyła fale elektromagnetyczne do obserwatora 2 (rys. X.1). Powierzchnie stałego Ψ są powierzchniami stałych faz tych fal elektromagnetycznych. Okres czasu

$$\Delta s = \int ds = \int \sqrt{g_{00}}\, dt = \sqrt{g_{00}} \int dt = g_{00} \cdot \Delta t$$

między dwiema tymi samymi fazami mierzony przez obserwatorów 1 i 2 jest różny, jeżeli g_{00} ma inną wartość w punktach czasoprzestrzeni, w których ci obserwatorzy znajdują się. W związku z tym częstości drgań fali elektromagnetycznej mierzone przez tych obserwatorów będą różne. Ich stosunek będzie



Rys. X.1

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{\sqrt{g_{00}|_1}}{\sqrt{g_{00}|_2}} ,$$

zwłaszcza zaś dla słabych pól, gdy $g_{00} = 1 + (2\varphi/c^2)$ otrzymujemy

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} .$$

Na przykład, gdy 1 oznacza gwiazdę lub Słońce, 2 zaś Ziemię, wówczas potencjał φ_2 możemy pominąć, gdyż jest mały w porównaniu z φ_1, a ponieważ $\varphi_1 < 0$, jako że jest to potencjał siły przyciągającej, otrzymujemy

$$\omega_2 < \omega_1 ,$$

a więc zjawisko zwane "przesunięciem ku czerwieni". Zjawisko zmiany częstości drgań fal elektromagnetycznych w ziemskim

polu grawitacyjnym zostało potwierdzone przy użyciu efektu Mössbauera, przy czym stwierdzono zgodność z wyżej podanym wzorem z dokładnością do 10% [4].

W newtonowskiej teorii grawitacji dla sferycznie symetrycznego ciała o masie M mamy potencjał grawitacyjny

$$\varphi = -\frac{kM}{r},$$

a więc dla takiej samej sytuacji w ogólnej teorii względności powinniśmy spodziewać się, że

$$g_{00} \cong 1 - \frac{2kM}{rc^2}.$$

Okazuje się, iż jedynym rozwiązaniem równania Einsteina dla pustej (na zewnątrz ciała) przestrzeni

$$G_{ij} = 0,$$

przy założeniu symetrii kulistej, jest czasoprzestrzeń Schwarzschilda, której forma metryczna w odpowiednim układzie współrzędnych jest postaci

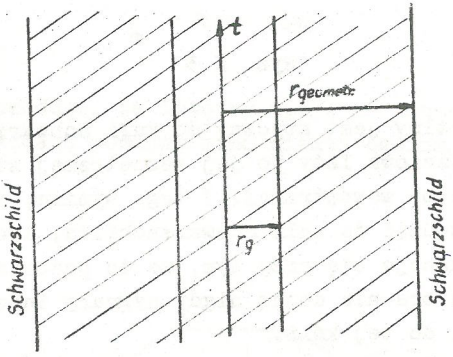
$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + \\ - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2).$$

Rozwiązanie to zostało znalezione przez Schwarzschilda już w 1916 r.. Tak jak w teorii Newtona, rozwiązanie to zależy wyłącznie od masy ciała, a nie zależy od jego budowy (sferycznie symetrycznej); ponadto jest zawsze statyczne - nawet wtedy, kiedy ciało podlega sferycznie symetrycznym oscylacjom.

W czasoprzestrzeni Schwarzschilda wyróżnioną rolę odgrywa zerowa hiperpowierzchnia o równaniu $r = r_g$, gdzie $r_g = \frac{2kM}{c^2}$ jest tzw. promieniem grawitacyjnym ciała. Przez pewien czas

sądzono, że na tej hiperpowierzchni geometria czasoprzestrzeni jest osobliwa, co przy dokładniejszej analizie okazuje się być niesłuszne. Nie prowadziło to do istotnych trudności, gdyż do niedawna uważano, że dla wszystkich ciał promień grawitacyjny jest dużo mniejszy niż promień geometryczny, a więc rzekoma osobliwość metryki w $r = r_g$ nie odgrywa żadnej roli. Jako przykład podamy promień grawitacyjny kilku ciał:

dla Słońca $r_g = 1{,}5$ km ,
dla Ziemi $r_g = 0{,}44$ cm ,
dla neutronu $r_g = 10^{-54}$ cm .



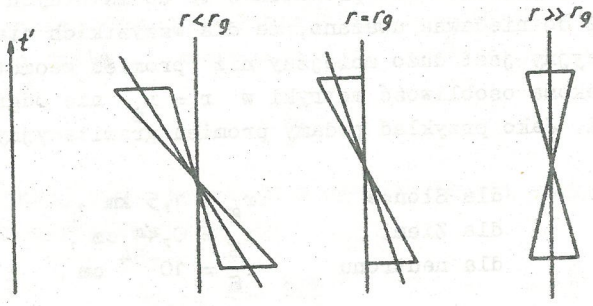
Rys. X.2

Od pewnego czasu w związku z rozważaniem późnych stadiów ewolucji gwiazd, które wypaliły całe dostępne paliwo jądrowe, dopuszcza się możliwość istnienia obiektów materialnych o wymiarach promieni mniejszych niż grawitacyjny.

Aby przekonać się o tym, że powierzchnia $r = r_g$ nie jest - jak mogłoby się wydawać - osobliwa, lecz zerowa, należy zastąpić czas t czasem t' określonym wzorem

$$c\,dt' = c\,dt - \left(1 - \frac{2kM}{rc^2}\right)^{-1} dr,$$

pozostawiając przy tym nie zmienione pozostałe współrzędne r, Θ, φ.



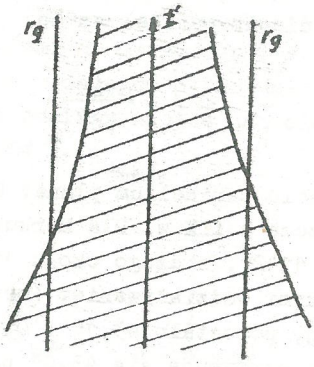
Rys. X.3

Stożek świetlny jest styczny do kuli Schwarzschilda, jego część przeszłościowa leży po jej zewnętrznej stronie, przyszłościowa zaś po wewnętrznej. Z tego wynika, że cząstki mogą jedynie wchodzić do kuli Schwarzschilda, lecz nie mogą z niej wyjść. Okazuje się przy tym, że do pozostającego na zewnątrz obserwatora nie dojdą nigdy sygnały informujące o dotarciu cząstki do tej kuli.

Kula Schwarzschilda może działać jak pułapka dla cząstek. W pewnych warunkach, gdy przyciąganie grawitacyjne przeważa nad ciśnieniem, materia gwiazdy będzie wnikać do kuli Schwarzschilda, a gwiazda będzie "zapadać" się - zjawisko to nosi nazwę grawitacyjnego kolapsu (rys. X.4).

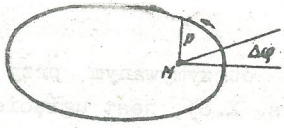
Według obecnych poglądów zapadają się wszystkie gwiazdy, które wypaliły całkowicie paliwo jądrowe, a w ostatnim stadium rozwoju posiadają masę przekraczającą pewną wielkość krytyczną, rzędu 1,5 masy Słońca.

Wiąże się z tym zagadnienie pulsarów. Przypuszcza się mianowicie, że są to obracające się gwiazdy, które wypaliły już całe swoje paliwo, lecz masa ich jest zbyt mała, żeby zapadły się. Charakteryzują je ogromne gęstości i niewielkie pro-



Rys. X.4

mienie, co powoduje, że istotny wpływ na procesy zachodzące w takich gwiazdach powinny mieć efekty ogólnej teorii względności.



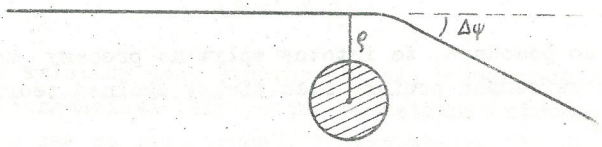
Rys. X.5

Na podstawie rozwiązania Schwarzschilda można przewidzieć inne efekty ogólnej teorii względności, do których należy ruch perihelium planet. Cząstka w polu grawitacyjnym symetrycznym danym rozwiązaniem Schwarzschilda porusza się (je-

żeli jej ruch jest ograniczony) po elipsie, która obraca się (rys. X.5). Przesunięcie perihelium po jednym obrocie jest zadane wzorem

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi kM}{pc^2}.$$

Takie przesunięcie perihelium planet Układu Słonecznego zaobserwowano jeszcze w XIX w. Dla Merkurego przesunięcie to na 100 lat wynosi 1142", z czego około 1100" wyjaśniono zaburzeniami wywołanymi oddziaływaniem (newtonowskim) innych planet. Dokładniej, pozostało 43,1" ± 0,4" na stulecie. Z wyżej podanego wzoru otrzymuje się 43,0" na stulecie, a więc zgodność jest uderzająca.



Rys.X.6

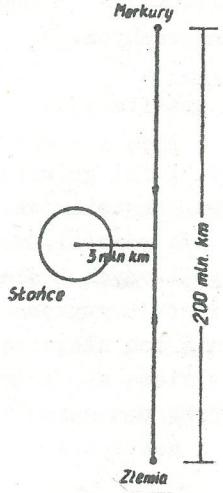
Innym efektem, otrzymywanym przy użyciu rozwiązania Schwarzschilda (rys. X.6), jest ugięcie promieni świetlnych w pobliżu gwiazd; jako wynik otrzymujemy tu

$$\Delta\psi = \frac{4kM}{\rho c^2}$$

Kładąc w miejsce M masę Słońca, w miejsce zaś ρ jego promień, dostajemy $\Delta\psi = 1{,}75"$. Odpowiednie pomiary, wykonywane w czasie zaćmień Słońca, są obarczone dość dużym błędem doświadczalnym, toteż potwierdzają słuszność OTW jedynie jakościowo, dając wynik w granicach od 1" do 2,4" [1].

Inne zjawisko, polegające na zmianie czasu przejścia syg-

nałów elektromagnetycznych w pobliżu Słońca, przewidział w 1964 r. Shapiro [5] (rys. X.7). Opóźnienie sygnału przemierzającego drogę od Ziemi do Merkurego i z powrotem w stosunku do czasu przejścia z dala od Słońca ma wynosić 200 μs. Obecnie prowadzone są pomiary mające na celu sprawdzenie tego "czwartego efektu" OTW *.



Rys.X.7

Obserwacje ugięcia promieni świetlnych wykazały wyższość teorii Einsteina nad teorią Nordströma, która przyjmowała, że prawdziwa jest pierwsza grupa założeń składających się na ogólną teorię względności, ale odrzucała dowolność tensora metrycznego przyjmując, iż metryka jest konforemnie euklidesowa, czyli w pewnym układzie współrzędnych ma postać

$$ds^2 = e^{\varphi}(c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2),$$

---

* Badania przeprowadzone przy użyciu satelity Mariner-6 dały opóźnienie wynoszące 200 μs ± 5%. Teoria Brahsa-Dicke a daje tu wynik różniący się od teorii Einsteina o 7%. Jest nadzieja, że badania prowadzone obecnie przy użyciu Mariner-7 dadzą dokładniejsze wyniki.

oraz zamiast równań Einsteina proponowała

$$R = \varkappa T, \quad \text{gdzie} \quad T = T^i_i$$

Teoria ta nie dawała jednak ugięcia promieni świetlnych, gdyż równania elektrodynamiki w próżni są niezmiennicze względem przekształceń konforemnych.

Fale grawitacyjne

Istnienie promieniowania i fal grawitacyjnych zostało teoretycznie uzasadnione przez Einsteina wkrótce po sformułowaniu równań ogólnej teorii względności. Ówczesne rachunki Einsteina były oparte na przybliżonych liniowych równaniach pola i z tego powodu były często krytykowane; linearyzacja równań w istotny sposób zmienia ich własności. Pewne trudności pojęciowe w tej dziedzinie wiążą się z dowolnością układów współrzędnych. Biorąc metrykę przestrzeni płaskiej we współrzędnych prostoliniowych, a następnie dokonując przekształcenia postaci

$$x \longmapsto x + f(x - ct)$$

otrzymujemy tensor metryczny o składowych wyglądających tak jakby opisywały ruch falowy. Wydaje się zatem, że dowolne pole grawitacyjne można, przy odpowiednim wyborze układu współrzędnych, traktować jako falę. Wątpliwości powoduje fakt, iż siła grawitacyjna ze względu na swój nietensorowy charakter nie jest pojęciem dobrze określonym. Podobnie ma się rzecz z energią. Jednak bardzo liczne i szczegółowe prace na temat promieniowania grawitacyjnego, oparte na ścisłych równaniach pola i analizie niezmienniczych geometrycznych własności czasoprzestrzeni, wykazały, że przewidywania Einsteina były słuszne i potwierdziły otrzymane przez niego wzory na moc promieniowania układów izolowanych.

Przypomnijmy, jak wygląda sprawa promieniowania w elektrodynamice. Z zasady zachowania ładunku

$$\sum_i q_i = \text{const}$$

wynika, że nie istnieją fale elektromagnetyczne o symetrii kulistej. Inaczej mówiąc, nie ma zmiennych monopoli elektromagnetycznych. W przypadku gdy układ ładunków wytwarzających pole spełnia relację

$$\frac{q_i}{m_i} = \text{const} ,$$

wówczas z zasady zachowania pędu

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const}$$

wynika, że znika druga pochodna momentu dipolowego

$$\dot{\vec{d}} = \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const} \cdot \vec{p} = \text{const},$$

a właśnie wielkość $\ddot{\vec{d}}$ określa natężenie promieniowania dipolowego.

W teorii grawitacji mamy zawsze obie te sytuacje ze względu na prawo zachowania masy i równość masy grawitacyjnej i masy bezwładnej. Nie istnieje zatem grawitacyjne promieniowanie monopolowe ani dipolowe, ale może istnieć promieniowanie kwadrupolowe, które jest jednak dużo słabsze niż tamte dwa.

Bez szczegółowych obliczeń łatwo przekonać się, że promieniowanie grawitacyjne jest bardzo słabe we wszystkich sytuacjach, z którymi mamy do czynienia w najbliższym nam otoczeniu Wszechświata. Elementarne, nie wykorzystujące równań Einsteina, obliczenia pozwalają ocenić rząd wielkości promieniowania wytwarzanego np. przez gwiazdę podwójną [7] :

$$P \sim \frac{Mc^2}{r/c} \left(\frac{kM}{rc^2}\right)^4 .$$

Tu M oznacza masę gwiazdy, r - odległość między jej składowymi.

Dla analogicznego problemu w elektrodynamice (nierelatywistyczny ruch ładunków e oraz -e po kole o promieniu r)

$$P_{em} \sim \frac{Mc^2}{r/c}\left(\frac{e^2}{Mc^2 r}\right)^3 .$$

Widać z tego, że promieniowanie grawitacyjne nie ma znaczenia dla układów atomowych. Jeśli przyjąć za e oraz M ładunek i masę elektronu, a za r - promień atomu, to

$$\frac{e^2}{Mc^2 r} \sim \alpha^2 \sim 10^{-4}, \quad \frac{kM}{c^2 r} \sim 10^{-47} .$$

Znaczne ilości energii grawitacyjnej promieniują gwiazdy podwójne o bardzo bliskich składowych i krótkich okresach obrotu (np. układ WZ Sagittae o masach 0,6 i 0,03 masy Słońca oraz okresie 81 minut). Można również spodziewać się znacznego promieniowania grawitacyjnego przy niesymetrycznym zapadaniu się (kolapsie) gwiazd [6, 8]. Interesujące jest zagadnienie promieniowania grawitacyjnego ładunku poruszającego się w zewnętrznym polu magnetycznym. Wiadomo, że pewne składowe promieniowania kosmicznego są wynikiem promieniowania synchrotronowego elektronów relatywistycznych w polu magnetycznym. Infeld i Róża Trautman [3] pokazali, że w przybliżeniu nierelatywistycznym natężenie promieniowania grawitacyjnego dla tego zagadnienia jest rzędu

$$P \sim \frac{Mc^2}{r/c}\left(\frac{v}{c}\right)^4 \frac{kM}{c^2 r} .$$

Promieniowanie to występuje w rzędzie v/c niższym niż w przypadku ciał oddziałujących jedynie grawitacyjnie. Jednak interpretacja fizyczna tego wyniku wymaga dużej ostrożności ze względu na trudności związane z pojęciem pola zewnętrznego w ogólnej teorii względności.

Porównajmy oddziaływania elektromagnetyczne i grawitacyjne w dziedzinie atomowej. Rozpatrzmy atom wodoru. Stosunek tych oddziaływań jest

$$e^2 : kMm \cong 0{,}2 \cdot 10^{40} ;$$

gdzie M - masa protonu, m - masa elektronu, e - jego ładunek.

Z drugiej strony tak duże liczby otrzymuje się rozpatrując Wszechświat jako całość: szacując jego wiek oraz liczbę zawartych w nim cząstek. Przypomnijmy prawo Hubble'a

$$v = r/T,$$

wiążące prędkość uciekających galaktyk v z ich odległością r (mierzoną w latach świetlnych). Stała T o wymiarze czasu, której wartość wynosi

$$T = 10^{10} \text{ lat},$$

charakteryzuje wiek Wszechświata. Wartość tej stałej w atomowych jednostkach czasu jest rzędu

$$T : \frac{e^2}{mc^3} \sim 10^{40} .$$

Jeśli symbolem ϱ oznaczymy średnią gęstość masy we Wszechświecie, to ilość cząstek w obserwowalnej jego części będzie rzędu (proton przyjmujemy za cząstkę "jednostkową")

$$\varrho(cT)^3 : M \sim 10^{80} .$$

Warto przytoczyć pogląd Diraca na występowanie tak wielkich liczb. Otóż, powiada on, że tak wielkich stałych nie będzie można wyjaśnić w żadnej rozsądnej teorii przyszłości, która obejmowałaby zjawiska atomowe i grawitacyjne. W związku z tym proponuje przyjąć, że wielkości te z biegiem czasu zmieniają swoją wartość. Przypuszcza się, że

$$e^2 : kMm \sim t ,$$

co przy założeniu $e = \text{const}$, $M, m = \text{const}$, dość dobrze potwierdzanym przez doświadczenie, daje

$$k \sim 1/t .$$

Hipoteza malenia stałej grawitacyjnej wydaje się być atrakcyjna że względu na trudności z wyjaśnieniem powstawania gwiazd i galaktyk. Formalizacja tej hipotezy polega na zastąpieniu stałej k pewnym polem skalarnym k , które spełniałoby pewne równania i opisywałoby wraz z tensorem metrycznym g_{ij} zjawiska grawitacyjne. Jedną szczegółową teorię ze zmienną stałą grawitacyjną podał Jordan, inną Brahs i Dicke. Obecnie czyni się próby doświadczalnego potwierdzenia tych teorii.

Inne uogólnienie, proponowane między innymi przez Iwanienkę, polega na odrzuceniu założenia o znikaniu torsji

$$S^i_{jk} \neq 0$$

Kosmologia

W dziedzinie kosmologii siły grawitacyjne odgrywają zupełnie zasadniczą rolę. Można jedynie zastanawiać się nad tym, czy i w jakim stopniu ogólna teoria względności wnosi coś nowego do opisu budowy Wszechświata jako całości. Jak wiadomo [7], komsologia newtonowska również przepowiada ucieczkę galaktyk i ekspansję materii we Wszechświecie. Ale proste argumenty oparte na analizie wymiarowej przekonują, że efekty relatywistyczne są w kosmologii duże. Jako charakterystyczną odległość w kosmologii należy wziąć "promień Wszechświata" c/H, gdzie H oznacza stałą Hubble'a (H=1/T). Jeżeli ϱ oznacza średnią gęstość materii we Wszechświecie, to wewnątrz kuli o promieniu c/H zawiera się masa rzędu $\varrho(c/H)^3$. Efekty relatywistyczne będą proporcjonalne do bezwymiarowego parametru

$$\frac{k\varrho(c/H)^3}{c^2(c/H)} = \frac{k\varrho}{H^2}$$

na podstawie obserwacji astronomicznych ten współczynnik

jest rzędu jedności. Dla modelu Wszechświata izotropowego i jednorodnego z równań Einsteina wynika, że krzywizna przestrzeni trójwymiarowej jest proporcjonalna do $(k\varrho/H^2) - 3$.

Jest rzeczą interesującą, że równanie Friedmanna (równanie ekspansji Wszechświata) można wyprowadzić bez użycia formalizmu ogólnej teorii względności, tylko na podstawie newtonowskiego prawa zachowania energii. Istotnie, wybierzmy układ odniesienia tak, aby jego początek $\mathcal{O}$ pokrywał się z położeniem wybranego elementu substratum (galaktyki). Niech R(t) oznacza odległość od $\mathcal{O}$ w chwili t innego wybranego elementu substratum o masie jednostkowej. Prawo zachowania energii dla tego elementu ma postać

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{kM}{R} = \text{const} ,$$

gdzie

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3 = \text{const}$$

jest masą zawartą w kuli o środku $\mathcal{O}$ i promieniu R(t).

Grawitacja a zjawiska kwantowe

Nie ulega wątpliwości, że zjawiska grawitacyjne, podobnie do wszystkich innych, muszą mieć jakieś podłoże kwantowe. Obecna klasyczna teoria grawitacji Einsteina jest z pewnością przybliżeniem ściślejszej teorii uwzględniającej kwantowy charakter zjawisk mikroświata. Z tak ogólnie sformułowanym poglądem zgadzają się chyba wszyscy fizycy. Duża część teoretyków ma również zdecydowany pogląd na to, jak należy zbudować taką kwantową teorię grawitacji. Przeważa zdanie, że należy to zrobić na wzór elektrodynamiki, traktując metrykę jako potencjał, zastępując pewne składowe tego potencjału operatorami spełniającymi odpowiednie reguły komutacyjne itd. Taka procedura jakkolwiek napotyka duże trudności techniczne, związane z ogólną niezmienniczością oraz nieliniowością

równań, jest w zasadzie możliwa. Należy jednak pamiętać, że nie każdą teorię klasyczną należy "kwantować".W każdym razie nie można tego robić w odniesieniu do teorii statystycznych. Trudno jednak uwierzyć w to, aby teoria grawitacji miała być teorią statystyczną typu termodynamiki. Analogie teorii grawitacji Einsteina do elektrodynamiki Maxwella są tak uderzające, że przeciwnicy kwantowania ogólnej teorii względności są w mniejszości. Można spodziewać się i potwierdzają to przeprowadzone przez różnych autorów rachunki, że skwantowana teoria grawitacji prowadzi do efektów podobnych do tych, które otrzymuje się w elektrodynamice: transmutacje cząstek z udziałem grawitronów, poprawki grawitacyjne do rozpraszania i do poziomów energetycznych atomów itp. Łatwo przewidzieć, że efekty te są niesłychanie małe. Rolę stałej sprzężenia między polem grawitacyjnym a materią gra wielkość o wymiarze długości

$$l = \sqrt{k\hbar/c^3} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ cm} .$$

Efekty kwantowo-grawitacyjne będą proporcjonalne do odpowiednich potęg stosunku l/λ , gdzie λ jest długością fali charakterystyczną dla danego problemu. Dla osiągalnych obecnie energii ten stosunek jest bardzo mały.

Wydaje mi się, że jeżeli powiązanie teorii względności z teorią kwantów wniesie coś istotnie nowego do fizyki, to nastąpi to na innej drodze niż konwencjonalne kwantowanie pola grawitacyjnego. Należy pamiętać, że teoria względności to również teoria budowy czasoprzestrzeni. U jej podstaw leży hipoteza, że czasoprzestrzeń jest ciągła; dokładniej, że posiada strukturę rozmaitości różniczkowej. To założenie wydaje się być uzasadnione na gruncie fizyki klasycznej, ale jest dalekie od oczywistości, gdy wziąć pod uwagę kwantową naturę zjawisk. Teorie z ciągłą czasoprzestrzenią zakładają możliwość identyfikacji dowolnie bliskich zdarzeń. Ale to ze względu na atomową budowę materii oraz skończone wymiary cząstek elementarnych nie jest wykonalne. Można spekulować, że

ta zasadnicza niemożliwość powinna mień swoje odbicie w budowie czasoprzestrzeni tak jak lokalna nierozróżnialność sił grawitacyjnych od sił inercji jest w naturalny sposób uwzględniana w ogólnej teorii względności. Oczywiście, każda zmiana założeń o budowie czasoprzestrzeni pociągnęłaby za sobą gruntowną rewizję teorii grawitacji i całej fizyki.

Literatura

1. ADAM M.G.: The observational tests of gravitation theory. Proc. Roy. Soc. A270, 1962, s. 297.
2. BONDI H.: Kosmologia. PWN Warszawa 1965.
3. INFELD L., MICHALSKA-TRAUTMAN R.: Radiation from systems in nearly periodic motion. Ann. Phys. 55,1969,s. 576-586.
4. POUND R.V., REBKA G.A. jr.: Apparent weight of photons. Phys. Rev. Letters 4, 1960, s. 337-341.
5. SHAPIRO I.I. et al.: Fourth test of general relativity: preliminary results. Phys. Rev. Letters 20,1968,s. 1265 - 1269.
6. SZKŁOWSKI I.S., KARDASZOW N.S.: Grawitacjonnyje wołny i "swierchzwiezdy". Dokł. AN SSSR 155, 1964 s. 1039-1041.
7. TRAUTMAN A.: Foundations and current problems of general relativity. W: Lectures on general relativity. Prentice-Hall New Jersey 1964.
8. ZELDOWICZ J.B., NOWIKOW I.D.: Izłuczenije grawitacjonnych wołn tiełami dwiżuszczychsja w pole kollapsirujuszczej zwiezdy. Dokł. AN SSSR 155, 1964 s. 1033-1036.