A. Trautman

PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE DES THÉORIES PHYSIQUES

par

Andrzej Trautman
Université de Varsovie

Conférences données au Collège de France
au mois de juin 1963

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]

PROPRIÉTÉS D'INVARIANCE DES THÉORIES PHYSIQUES

par

Andrzej Trautman
Université de Varsovie

Conférences données au Collège de France
au mois de juin 1963

Préface

Ces notes sont la reproduction d'une partie des quatre conférences données au mois de juin 1963 au Collège de France. Une de ces conférences avait pour sujet la géométrie de l'espace-temps de Newton ; elle n'est pas incluse ici. Pour la plupart, les résultats présentés ici ne sont pas nouveaux. Une bibliographie se trouve à la fin du texte.

Ces conférences ont pu être données grâce à l'aimable invitation de Monsieur M. Bataillon, l'Administrateur du Collège de France. Je remercie Monsieur A. Lichnerowicz pour sa courtoise hospitalité pendant mon séjour à Paris. J'ai beaucoup profité des discussions avec M. Bel, Mme Choquet, M. Kichenassamy, M. Lichnerowicz, Mlle Mavridès, M. Papapetrou et Mme Tonnelat.

I. THÉORÈMES DE NOETHER

1. Introduction. Ce cours est consacré à une étude des conséquences physiques et mathématiques de deux hypothèses : 1° que les équations du mouvement peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel et 2° qu'elles admettent des groupes continus de symétries. Le premier chapitre est consacré à un rappel des théorèmes de Noether, le second à une étude des lois de conservation dans les théories relativistes et le troisième à un exposé de la dynamique généralisée de Dirac.

2. Transformations de jauge et symétries. Soit X_n une variété différentiable à n dimensions ; nous l'appellerons l'espace de base. Dans chaque cas particulier il faut spécifier sa topologie et sa classe de différentiabilité mais nous ne les préciserons pas ici. Nous supposerons que, étant donné un système de coordonnées x^a de X_n, l'histoire du système physique considéré peut être décrite par N fonctions des x^a, $y_A(x)$, $A = 1,\dots, N$.

Exemples. a) Dans le cas de la dynamique classique d'un système mécanique à N degrés de liberté, la variété différentiable de base est à une dimension, X_1. Si t est la coordonnée locale de X_1, l'histoire du système est décrite par les N fonctions $q^1(t),\dots, q^N(t)$. b) Pour décrire le même système physique en mécanique quantique, on peut introduire une variété à $N+1$ dimensions, X_{N+1} avec $t, q^1,\dots, q^N$ comme coordonnées locales. Dans la représentation de Schrödinger l'histoire (imperturbée) du système est donnée par une fonction complexe $\psi(t, q^1,\dots, q^N)$. c) Dans une théorie classique relativiste d'un champ tensoriel φ pour l'espace de base on prend une X_4 et pour $y_A(x)$ les composantes $\varphi_A(x)$ de ce champ par rapport aux repères naturels associés au système de coordonnées locales.

Pour que les fonctions $y_A(x)$ correspondent à une histoire physique possible, elles doivent satisfaire à des <u>équations du mouvement</u> appropriées. Nous les écrirons symboliquement comme

$$L^A(x\ ;\ y(x)) = 0\ , \qquad A = 1,\dots, N, \tag{1}$$

et supposerons que les L^A sont des fonctions des x, y_A et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

Un système physique donné peut être décrit par rapport aux différents systèmes de coordonnées locales de l'espace de base. Il y a aussi de l'arbitraire dans le choix des fonctions y_A. En général, on peut effectuer des <u>changements de jauge</u> des variables qui servent à décrire le système. Pour des raisons de simplicité nous nous restreindrons aux transformations de jauge de la forme

$$\begin{aligned} x^{a'} &= X^a(x)\ , \\ y'_A(x') &= Y_A(x\ ;\ y(x))\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Les fonctions X^a et Y_A dépendent des arguments indiqués et satisfont à des hypothèses de régularité et d'invertabilité appropriées.

<u>Exemples</u>. a) En dynamique classique on considère souvent des transformations de jauge de la forme

$$\begin{aligned} t' &= t\ , \\ q'^A &= Q^A(t\ ;\ q(t))\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire des transformations de jauge sans transformation de coordonnées de l'espace de base ; b) au contraire, en mécanique quantique le changement

$$t' = t$$
$$q^{A'} = Q^A(t,q)$$
$$\psi'(t',q') = \psi\,(,q)$$

correspond à une transformation (spéciale) de coordonnées de X_{N+1} ; c) dans la théorie relativiste d'un champ tensoriel φ une classe importante des transformations de jauge est celle des changements des composantes locales de φ ,

$$\varphi'_A(x') = \mathcal{A}_A^B(x)\,\varphi_B(x)$$

induits par les changements des coordonnées,

$$x^{a'} = X^a(x) \; .$$

Ici $\mathcal{A}_A^B$ est une matrice dépendant de X^a, définie par le type tensoriel de φ .

Dans la nouvelle jauge, les fonctions $y'_A(x')$ satisfont aux nouvelles équations du mouvement,

$$L'^A(x' \; ; \; y'(x')) = 0$$

dont la forme est, en général, différente de (1).

On appelle une transformation de symétrie toute transformation de jauge qui conserve la forme des équations du mouvement,

(3) $$L'^A(x \; ; \; y(x)) \equiv L^A(x \; ; \; y(x)) \; .$$

Autrement dit, les équations du mouvement sont invariantes par les transformations de symétrie. Si (2) est une symétrie, $y'_A(x)$ satisfait aux équations du mouvement (1). A chaque transformation de jauge qui est une symétrie, on peut associer une application

$$y_A(x) \longrightarrow y'_A(x)$$

de l'ensemble des solutions de (1) sur lui-même. Souvent, c'est précisément cette correspondance qu'on appelle une symétrie.

3. Principe variationnel. Compatibilité des équations du mouvement. Nous allons maintenant faire l'hypothèse fondamentale que les équations du mouvement, dans n'importe quelle jauge, peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel

$$\delta W = 0 \ , \quad W = \int_{\Omega} L dx \ , \qquad dx = dx^1 \dots dx^n . \tag{4}$$

Pour faciliter l'écriture des formules, nous supposerons que L ne dépend pas de dérivées de y_A d'ordre supérieur à deux ,

$$L = L(x^a, y_A, \partial_a y_A , \partial_a \partial_b y_A) \equiv L(x ; y(x)). \tag{5}$$

Pour calculer δW il faut donc prendre des variations δy_A qui s'annulent avec leurs dérivées premières sur le bord de Ω . Les équations du mouvement s'écrivent

$$L^A \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial y_A} - \partial_a \frac{\partial L}{\partial y_{Aa}} + \partial_a \partial_b \frac{\partial L}{\partial y_{Aab}} = 0 \ , \tag{6}$$

où

$$y_{Aa} = \partial_a y_A \ , \quad y_{Aab} = \partial_a \partial_b y_A \ .$$

La fonction de Lagrange L n'est pas déterminée d'une façon unique par la forme des équations du mouvement. Si M^a $(a = 1, \dots, n)$ sont des fonctions arbitraires de x^a, y_A et $\partial_a y_A$, la fonction $\tilde{L} = L + \partial_a M^a$ donne lieu aux mêmes équations que L.

Dans une jauge différente, le principe variationnel devient

$$\delta W' = 0 \ , \quad W' = \int_{\Omega'} L' \, dx' \ ,$$

où L' est une fonction de $x^{a'}$, y'_A, etc., en général différente de L. Ω' est l'image de Ω par l'application $x^a \to x^{a'}$. Il faut maintenant demander que les équations du mouvement dans les différentes jauges soient compatibles : chaque fois que les $y_A(x)$ annulent L^A, les fonctions $y'_A(x')$ qui en résultent par la transformation (2) doivent annuler L'^A. Puisque $L^A = 0$ est équivalent à $\delta W = 0$, une condition suffisante de la compatibilité est

$$\delta W = \delta W' . \tag{7}$$

Il faut bien préciser que nous ne discutons pas ici la compatibilité des équations $L^A = 0$ entre elles-mêmes mais la relation entre ces équations écrites en différentes jauges, sous l'hypothèse que dans chaque jauge elles admettent des solutions. Il s'ensuit de (7) qu'il existe des fonctions K^a telles que

$$\int_{\Omega'} L'(x' \,;\, y'(x'))dx' \equiv \int_{\Omega} [L(x \,;\, y(x)) - \partial_a K^a]dx . \tag{8}$$

Les fonctions K^a dépendent des x^a, y_A et $\partial_a y_A$.

<u>Exemple</u>. La fonction de Lagrange pour un point matériel libre de masse m, en mécanique de Newton, est

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 .$$

Ici, les trois composantes du vecteur $\vec{r}$ jouent le rôle des y_A ; les équations du mouvement sont $d^2 \vec{r}/dt^2 = 0$. Un changement de jauge possible est donné par la transformation de Galilée

$$t' = t, \quad \vec{r}'(t') = \vec{r}(t) + \vec{V}t, \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{cons}}\text{tante}.$$

Les équations du mouvement dans la nouvelle jauge sont de la même forme, $d^2\vec{r}'/dt'^2 = 0$. On peut donc écrire

$$L' = \frac{1}{2}\, m\left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\right)^2$$

$$L' = L - \frac{dK}{dt} \;,$$

$$K = -m(\vec{V}.\vec{r} + \frac{1}{2}\,\vec{V}^2 t) \;.$$

4. <u>L'identité de Noether fondamentale</u>. Une transformation de symétrie ne change pas la forme des équations du mouvement ; pour qu'il en soit ainsi il suffit qu'elle ne change pas la forme de L,

(9) $$L'(x \;;\; y(x)) \equiv L(x \;;\; y(x)) \;.$$

Nous nous limiterons aux transformations de symétrie qui satisfont à (9) et constituent un <u>(pseudo) groupe continu</u>. Nous écrirons les transformations infiniment petites [1] comme

$$x^{a'} = x^a + \delta^* x^a \;,$$

$$y'_A(x') = y_A(x) + \delta^* y_A$$

et désignerons par $\bar{\delta} K^a$ la partie principale des fonctions K^a correspondant à la transformation infiniment petite (10). En vertu de (9), l'équation (8) peut s'écrire

$$\int_\Omega [L(x \;;\; y'(x)) + \partial_a(L\,\delta^* x^a)]dx \equiv \int_\Omega [L(x;y(x)) - \partial_a \bar{\delta} K^a]dx \;.$$

Si l'on introduit la notation

$$\bar{\delta}\, y_A = y'_A(x) - y_A(x) \;, \qquad \bar{\delta} L = L(x \;;\; y'(x)) - L(x \;;\; y(x)) \;,$$

l'égalité des intégrales a pour conséquence

(11) $$\bar{\delta} L + \partial_a(\bar{\delta} K^a + L\,\delta^* x^a) \equiv 0.$$

Dans le cas où y_A est un objet géométrique et (10) est une transformation infiniment petite des coordonnées locales accompagnée par le changement correspondant des composantes de y_A , $\bar{\delta} y_A$ est la dérivée de Lie de y_A par rapport à $\bar{\delta}^* x^a$.

L'identité (11) s'écrit [2]

$$(12) \qquad L^A \bar{\delta} y_A + \partial_a \bar{\delta} t^a \equiv 0 ,$$

où

$$(13) \qquad \bar{\delta} t^a \underset{\text{def}}{=} L\, \delta^* x^a + \left(\frac{\partial L}{\partial y_{Aa}} - \partial_b \frac{\partial L}{\partial y_{Aab}}\right) \bar{\delta} y_A + \frac{\partial L}{\partial y_{Aab}} \bar{\delta} y_{Ab} + \bar{\delta} K^a .$$

5. <u>Lois de conservation</u>. Supposons que le groupe de symétries est un groupe de Lie à ℓ paramètres, G_ℓ , et soient $a^\lambda\ (\lambda = 1,\dots,\ell)$ les paramètres de ce groupe. Les transformations infinitésimales correspondant au groupe sont

$$\delta^* x^a = a^\lambda \xi^a_\lambda(x), \quad \bar{\delta} y_A = a^\lambda \eta_{A\lambda}(x) , \quad \bar{\delta} t^a = a^\lambda t^a_\lambda , \text{ etc.}$$

De l'identité de Noether fondamentale (12) s'ensuivent ℓ identités

$$(14) \qquad L^A \eta_{A\lambda} + \partial_a t^a_\lambda \equiv 0, \qquad \lambda = 1,\dots, \ell .$$

Quand les équations du mouvement sont satisfaites, $L^A = 0$, ces identités ont pour conséquence ℓ lois de conservation de forme différentielle

$$(15) \qquad \partial_a t^a_\lambda = 0, \qquad \lambda = 1,\dots, \ell .$$

<u>Exemple</u>. Considérons un système mécanique classique à N degrés de liberté, décrit par N coordonnées $q^A(t)$, N impulsions $p_A(t)$ et une fonction de Hamilton $H(q,p)$. L'action pour ce système est $\int (p_A \dot{q}^A - H)dt$. Le groupe à un paramètre défini par les équations

$$p_A \to p'_A = P_A(p,q,a),$$
$$q^A \to q'^A = Q^A(p,q,a),$$

où

$$\frac{dP_A}{da} = \frac{\partial S}{\partial q^A}, \qquad P_A(p,q,0) = p_A$$

$$\frac{dQ^A}{da} = -\frac{\partial S}{\partial p_A}, \qquad Q^A(p,q,0) = q^A$$

$$S = S(p,q)$$

est un groupe de transformations canoniques. Si, en plus, S est telle que son crochet de Poisson avec H s'annule, $\{H,S\} \equiv 0$, ce groupe est un groupe de symétries et l'identité (14) devient

$$\frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial q^A}(\dot{q}^A - \frac{\partial H}{\partial p_A}) - \frac{\partial S}{\partial p_A}(\dot{p}_A + \frac{\partial H}{\partial q^A}) \equiv 0 .$$

S = constante est donc une intégrale première des équations du mouvement.

6. <u>Les identités de Bianchi généralisées</u>. Supposons que les transformations infinitésimales du groupe de symétries dépendent des m fonctions arbitraires de x. Dans ce cas le groupe sera désigné par $G_{\infty m}$ et les fonctions arbitraires en question par $a^\mu(x)$, $\mu = 1,\ldots,m$. Une transformation infinitésimale de y_A sera écrite comme

$$(16) \qquad \bar{\delta} y_A = a^\mu \gamma_{A\mu} - \partial_a a^\mu \gamma^a_{A\mu} + \ldots + (-1)^s \partial_{a_1} \ldots \partial_{a_s} a^\mu \gamma^{a_1 \ldots a_s}_{A\mu} .$$

Moyennant des hypothèses semblables sur $\delta^* x^a$, $\bar{\delta} K^a$, etc., l'équation (11) devient une identité par rapport aux fonctions a^μ et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Les fonctions a^μ étant arbitraires, les coefficients de ces différentes dérivées doivent s'annuler séparément. Parmi ces diverses identités les plus importantes sont celles qui sont linéaires et homogènes par rapport à L^A. On peut les obtenir en choisissant un domaine Ω et des fonctions a^μ qui s'annulent sur le bord de Ω avec leurs dérivées d'ordre $\leqslant s-1$ et en intégrant les deux membres de (11) sur Ω. Par intégration par parties on obtient m identités

$$(17) \qquad L^A \gamma_{A\mu} + \partial_a (L^A \gamma^a_{A\mu}) + \ldots + \partial_{a_1} \ldots \partial_{a_s} (L^A \gamma^{a_1 \ldots a_s}_{A\mu}) \equiv 0$$

qu'on appelle "les identités de Bianchi généralisées".

<u>Exemple</u>. Les identités de Bianchi "contractées",

$$(18) \qquad \nabla_b (R^b_a - \frac{1}{2} \delta^b_a R) \equiv 0,$$

peuvent être obtenues à partir de l'identité de Noether pour l'action $\int \sqrt{|g|}\, R\, dx$ qui est invariante par transformations arbitraires de coordonnées. Ici, R^b_a, R, g et ∇_a désignent respectivement, le tenseur de Ricci, la courbure scalaire, le déterminant du tenseur métrique et la dérivation covariante dans un espace riemannien.

7. <u>Les lois de conservation "impropres" ou "fortes"</u>. Soit G_ℓ un sous-groupe de Lie d'un groupe continu infini de symétries, $G_{\infty m}$. Dans la notation des paragraphes précédents, on peut écrire pour une transformation infinitésimale de G_ℓ :

$$a^\mu (x) = a^\lambda \xi^\mu_\lambda (x) \ ; \quad \lambda = 1, \ldots, \ell \ ; \ \mu = 1, \ldots, m \ ;$$

ici les ξ^μ_λ sont des fonctions données de x. La transformation infinitésimale (16) devient

$$\bar{\delta}\, y_A = a^\lambda (\gamma_{A\mu}\, \xi^\mu_\lambda - \ldots + (-1)^s \gamma^{a_1 \ldots a_s}_{A\mu}\, \partial_{a_1} \ldots \partial_{a_s} \xi^\mu_\lambda)$$

et l'identité fondamentale donne

$$(19)\quad L^A(\gamma_{A\mu}\,\xi^\mu_\lambda - \dots + (-1)^s \gamma^{a_1\dots a_s}_{A\mu}\,\partial_{a_1}\dots\partial_{a_s}\xi^\mu_\lambda) + \partial_a\, t^a_\lambda \equiv 0 \,.$$

Il résulte de (17) que (19) peut s'écrire

$$\partial_a\ \Theta^a_\lambda \equiv 0$$

où $\Theta^a_\lambda \equiv t^a_\lambda$ + une combinaison linéaire de L^A et des dérivées de L^A.

Dans le cas $s = 1$, on a simplement

$$(21)\qquad \Theta^a_\lambda \equiv t^a_\lambda - L^A\gamma^a_{A\mu}\,\xi^\mu_\lambda \,.$$

L'identité (20) est une loi de conservation "impropre" : elle est satisfaite irrespectivement des équations du mouvement [3]. Les lois propres (ou "faibles"), $\partial_a\, t^a_\lambda = 0$, sont plus informatives que les lois "fortes". Parfois il n'est pas nécessaire ni même possible de résoudre complètement les équations du mouvement mais on peut tirer des conclusions sur le système physique en s'appuyant sur ces lois de conservation. D'autre part, les lois fortes constituent des caractéristiques essentielles de la théorie.

Il résulte de (20) qu'il existe des "superpotentiels", c'est-à-dire des fonctions U^{ab}_λ telles que

$$\Theta^a_\lambda = \partial_b\, U^{ab}_\lambda \qquad \text{et} \qquad U^{ab}_\lambda + U^{ba}_\lambda = 0\,.$$

Exemples. Dans la théorie de Maxwell les transformations de jauge électromagnétique constituent un $G_{\infty 1}$. Si $F_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 0,1,2,3)$ est le bivecteur du champ, les équations du mouvement sont $\Theta \equiv \partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0$ et les identités de Bianchi généralisées sont

$$\partial_\alpha\, \Theta^\alpha \equiv 0\,.$$

Le superpotentiel se confond ici avec le champ électromagnétique même.

II. LOIS DE CONSERVATION EN THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

8. L'action et les lois de conservation pour une theorie du champ. Nous allons dériver une forme assez générale des lois de conservation pour des théories relativistes. Nous entendrons par une "théorie relativiste" toute théorie physique fondée sur l'hypothèse que l'espace-temps (ou, d'une façon plus générale, l'espace de base) est une variété riemannienne.

Considérons une théorie relativiste classique d'un champ de densités tensorielles $\varphi_A(x)$ dont les équations dérivent d'un principe variationnel (I.4) avec une fonction de Lagrange.

$$L = L(g_{\alpha\beta}, \varphi_A , \partial_\alpha \varphi_A). \tag{1}$$

Ici, $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$ est le tenseur métrique d'une variété riemannienne (ou, plutôt, "lorentzienne") quadridimensionnelle V_4. L est une fonction des variables indiquées qui

1° est une densité scalaire de poids $+1$,

2° dépend de ses arguments de la même façon dans tous les systèmes de coordonnées.

La première de ces hypothèses assure la compatibilité des équations du mouvement écrites en différents systèmes de coordonnées et précise que $K^a = 0$ pour les changements des coordonnées. Il résulte de la deuxième hypothèse que la forme de L^A, en tant que fonction de φ_A, $\partial_\alpha \varphi_A$, $\partial_\alpha \partial_\beta \varphi_A$ et du tenseur métrique est invariante par transformations de coordonnées. On verra par la suite qu'il n'y a rien d'essentiel dans les hypothèses sur l'ordre de dérivées de φ_A et de $g_{\alpha\beta}$ dont dépend la fonction de Lagrange L. On pourrait bien considérer une théorie avec L de la forme

(1 a) $$L = L(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \varphi_A, \partial_\alpha \varphi_A, \partial_\alpha \partial_\beta \varphi_A)$$

et les complications qui en résulteraient seraient seulement dans l'écriture des formules.

Avant de nous plonger dans le formalisme, nous voulons faire une remarque sur le rôle des principes variationnels et des fonctions de Lagrange. Les expériences physiques permettent (parfois) d'établir la forme des équations du mouvement qui décrivent l'évolution du système au cours du temps. Il se trouve que la plupart de ces équations peuvent être obtenues à partir des principes variationnels appropriés. Les équations d'évolution sont bien déterminées par la physique mais il n'en est pas de même de l'intégrale d'action W, dont "la seule raison d'être est d'être variée". Il s'ensuit que la fonction de Lagrange n'est déterminée par l'expérience qu'aux transformations

(2) $$L \rightarrow \tilde{L} = L + \partial_\alpha M^\alpha$$

près. En conséquence, pour qu'une conclusion tirée de l'existence de l'action ait un sens physique, il faut qu'elle soit invariante par (2). En particulier cela s'applique aux quantités conservées telles que l'énergie et l'impulsion et aussi aux densités de distribution de l'énergie-impulsion, etc.

Pour établir l'identité de Noether pour $W = \int_\Omega L\, dx$ il suffit de calculer la dérivée de Lie de L par rapport à un champ vectoriel arbitraire $\vec{\xi}$. Etant donné que φ_A est une densité tensorielle, nous pouvons écrire une formule générale pour sa dérivée de Lie [3]

$$\mathcal{L}\,\varphi_A = \xi^\alpha \partial_\alpha \varphi_A + F_{A\alpha}{}^{B\beta} \varphi_B \partial_\beta \xi^\alpha .$$

De nos hypothèses sur L il vient $(\varphi_{A\alpha} = \partial_\alpha \varphi_A)$:

$$0 \equiv \mathcal{L}L - \partial_\alpha(L\xi^\alpha) \equiv \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} \mathcal{L}\varphi_A + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A\alpha}} \mathcal{L} \ \varphi_{A\alpha} - \partial_\alpha(L\xi^\alpha) ,$$

ou

$$(3) \qquad \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} + L^A \mathcal{L}\varphi_A + \partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A\alpha}} \mathcal{L}\varphi_A - L\xi^\alpha\right) \equiv 0 .$$

Cette identité contient les composantes du champ $\vec{\xi}$, leurs dérivées premières et secondes. Les coefficients de ces différents termes doivent s'annuler séparément ; on obtient donc trois systèmes d'identités [4]

$$(4) \qquad S_\alpha^{(\beta\gamma)} \equiv 0 ,$$

$$(5) \qquad T_\alpha^{\ \beta} \equiv t_\alpha^{\ \beta} + \nabla_\gamma S_\alpha^{\ \beta\gamma} + L^A F_{A\alpha}^{\ \ \ B\beta} \varphi_B ,$$

$$(6) \qquad \nabla_\beta T_\alpha^{\ \beta} \equiv -L^A \nabla_\alpha \varphi_A + \nabla_\beta (L^A F_{A\alpha}^{\ \ \ B\beta} \varphi_B) .$$

Ici, $S_\alpha^{\ \beta\gamma}$, $T_\alpha^{\ \beta}$ et $t_\alpha^{\ \beta}$ sont (les composantes) des densités tensorielles de poids +1, dont le caractère tensoriel est indiqué par le nombre et la position des indices. Ces quantités sont définies par

$$(7) \qquad S_\alpha^{\ \beta\gamma} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A\gamma}} F_{A\alpha}^{\ \ \ B\beta} \varphi_B ,$$

$$(8) \qquad T^{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} ,$$

$$(9) \qquad t_\alpha^{\ \beta} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A\beta}} \nabla_\alpha \varphi_A - L \delta_\alpha^\beta .$$

Dans le cas d'un lagrangien plus général, (1 a), la définition de $T^{\alpha\beta}$ doit être remplacée par

$$(8a) \qquad T^{\alpha\beta} = -2 \frac{\delta W}{\delta g_{\alpha\beta}}$$

dont (8) est un cas particulier. Les autres définitions et les identités subissent des modifications appropriées.

Nous allons définir encore deux densités vectorielles

(10) $$T^{\alpha} = T^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta} \qquad \text{et} \qquad t^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A\alpha}} \mathcal{L}\varphi_A - L\xi^{\alpha} .$$

Si les équations du mouvement sont satisfaites, $L^A = 0$, et $\vec{\xi}$ est un vecteur de Killing.

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 0 ,$$

on a les lois de conservation

(11) $$\partial_{\alpha} T^{\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_{\alpha} t^{\alpha} = 0 .$$

Par intégration sur une hypersurface Σ orientée dans l'espace et sous des hypothèses convenables sur le comportement asymptotique de φ_A , on obtient les constantes du mouvement,

(12) $$\int_{\Sigma} T^{\alpha}\, dS_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_{\Sigma} t^{\alpha}\, d S_{\alpha} .$$

Ces deux lois de conservation sont mutuellement équivalentes dans le sens que T^{α} et t^{α} diffèrent par un rotationnel,

(13) $$T^{\alpha} = t^{\alpha} + \partial_{\beta}(\xi^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\alpha\beta}) .$$

Le tenseur $T^{\alpha\beta}/\sqrt{|g|}$, qu'on appelle le <u>tenseur métrique d'impulsion-énergie</u>, est invariant par transformations (2) ; donc T^{α} jouit de la même propriété. Par contre, t^{α} et le <u>tenseur canonique</u> $t_{\alpha}^{\beta}/\sqrt{|g|}$ dépendent du choix particulier de L. On ne peut pas attacher de signification physique à la distribution locale d'énergie ou d'impulsion donnée par t^{α} . Néanmoins, t^{α} et T^{α} donnent les mêmes valeurs pour les quantités totales, donc l'intégrale.

$$\int_{\Sigma} t^{\alpha} dS_{\alpha}$$

est invariante par les substitutions (2).

L'interprétation physique de (12) dépend du caractère géométrique de $\vec{\xi}$. Dans l'espace-temps de Minkowski, en choisissant pour $\vec{\xi}$ les 10 solutions indépendantes de l'équation de Killing on obtient les lois de conservation habituelles.

<u>Exercice</u>. En théorie de la relativité restreinte, écrire les équations du mouvement et un principe variationnel pour la théorie classique des particules à masse nulle et spin deux. Calculer le tenseur symétrique et un tenseur canonique de l'énergie-impulsion, discuter l'invariance de jauge de l'énergie totale [5]. Généraliser cette théorie à un espace de base riemannien et noter la différence entre cette généralisation et celle de la théorie de Maxwell.

9. <u>Lois de conservation en relativité générale</u>. La relativité générale est une théorie relativiste de la gravitation dans laquelle on identifie le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ avec les potentiels gravitationnels et on postule que les équations d'évolution s'obtiennent en variant l'action

$$W + W_g \tag{14}$$

par rapport aux variables "matérielles" φ_A et gravitationnelles $g_{\alpha\beta}$. Nous supposerons que l'intégrale d'action gravitationnelle W_g est de la forme

$$W_g = \int_{\Omega} G(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma \partial_\delta g_{\alpha\beta})\, dx \tag{15}$$

et que G est telle que les équations de la gravitation sont invariantes par transformations de coordonnées. Par exemple, on obtient la relativité générale d'Einstein en posant

$$G = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{|g|}\; R \tag{15a}$$

ou bien

$$G = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{|g|}\;\; g^{\alpha\beta}\left(\left\{{\lambda \atop \alpha\mu}\right\}\left\{{\mu \atop \beta\lambda}\right\} - \left\{{\varkappa \atop \alpha\beta}\right\}\left\{{\lambda \atop \varkappa\lambda}\right\}\right).$$

Si l'on écrit

(16) $$G^{\alpha\beta} \underset{\text{def}}{=} -16\pi \frac{\delta W_g}{\delta g_{\alpha\beta}} ,$$

Les équations du champ gravitationnel, obtenues à partir de (14), sont

(17) $$G^{\alpha\beta} + 8\pi T^{\alpha\beta} = 0 .$$

L'identité fondamentale pour W_g est de la forme

(18) $$-\frac{1}{16\pi} G^{\alpha\beta} \mathcal{L} g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \tau^\alpha \equiv 0$$

et l'identité de Bianchi qui s'ensuit est

(19) $$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} \equiv 0 .$$

On obtient donc une loi de conservation impropre

(20) $$\partial_\alpha \Theta^\alpha \equiv 0$$

où

$$\Theta^\alpha \underset{\text{def}}{=} \tau^\alpha - \frac{1}{8\pi} G^\alpha{}_\beta \xi^\beta$$

est une densité vectorielle qui peut être représentée comme le rotationnel d'un superpotentiel [3]. En vertu de (17), Θ^α peut s'écrire

$$\Theta^\alpha = \tau^\alpha + T^\alpha .$$

τ^α est une densité vectorielle qui peut être interprétée comme décrivant la densité de l'énergie ou de l'impulsion gravitationnelle. Mais il faut rappeler encore que τ^α dépend du choix particulier de G et n'est pas invariant par les transformations

$$G \rightarrow G + \partial_\alpha M_g^\alpha \ .$$

Il n'est donc pas possible de localiser l'énergie gravitationnelle : ceci est une conséquence du formalisme, si l'on accepte le point de vue sur la relativité générale exposé au début de ce paragraphe. Toutefois, moyennant des hypothèses appropriées sur la topologie de V_4 et sur le comportement asymptotique du champ il est possible de définir l'énergie (l'impulsion, etc.) totale comme

$$\int_\Sigma \Theta^\alpha \, d\, S_\alpha \ .$$

L'étude des conditions sous lesquelles cette expression peut être considérée comme une énergie totale du système gravitation-matière a fait l'objet de plusieurs travaux [6].

Les physiciens se sont donnés beaucoup de peine pour détruire le caractère géométrique simple de $\Theta^\alpha = \Theta^\alpha(\xi)$ et $\tau^\alpha = \tau^\alpha(\xi)$. Un procédé efficace pour le faire est de remarquer que les identités (18) et (20) restent vraies même si les ξ^α ne sont pas des composantes d'un champ vectoriel et d'utiliser pour les ξ^α des objets bizarres. Souvent on prend quatre objets $\xi^\alpha_{(\beta)}$ dont les "composantes" sont des scalaires ; par exemple

$$\xi^\alpha_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta \qquad , \qquad \alpha\, , \beta = 0,1,2,3$$

dans <u>tout</u> système de coordonnées. Le tableau de 16 nombres (par point) définis dans chaque système de coordonnées par

$$\tau_\alpha^\beta = \tau^\beta(\xi_{(\alpha)})$$

est appelé un <u>pseudotenseur</u> [6], [7]. En conséquence de (20) il satisfait à

$$\partial_\beta(\tau_\alpha^\beta + T_\alpha^\beta) = 0 \ .$$

Une autre possibilité est d'ajouter à τ^α ou à τ_α^β le rotationnel d'une matrice antisymétrique qui n'est pas un tenseur.

Les pseudotenseurs sont utilisés toujours en conjonction avec des conditions sur le système de coordonnées. On comprend aisément qu'il n'y a pas de différence réelle entre ce procédé et celui qui utilise une densité vectorielle $\tau^{\alpha}(\xi)$ avec un champ vectoriel $\vec{\xi}$ donné. Etant donné que c'est seulement l'énergie globale qui compte, on voit facilement qu'il suffit de préciser le système de coordonnées ou le champ $\vec{\xi}$ à l'infini spatial d'un système gravitant isolé.

Tout ce qui a été dit ici au sujet de l'énergie gravitationnelle était fondé sur l'hypothèse qu'il n'y a pas dans l'espace-temps d'autres structures géométriques définies localement, que celles induites par la métrique riemannienne. Récemment, un certain nombre d'auteurs ont suggéré la possibilité d'introduire des <u>structures géométriques additionnelles</u> afin d'obtenir une énergie gravitationnelle localisable [8], [9] (voir aussi un travail antérieur, [10]). Le problème important de l'interprétation physique de ces éléments nouveaux ne semble pas avoir été résolu. Une autre possibilité est de définir une énergie gravitationnelle localisable à partir de certaines <u>constructions globales</u> dans l'espace-temps [11].

<u>Exercice</u>. Montrer qu'on peut obtenir [12]

$$\Theta^{\alpha} = \frac{\sqrt{|g|}}{4\pi} \nabla_{\beta} \nabla^{[\beta} \xi^{\alpha]}$$

à partir de l'action gravitationnelle avec G donnée par (15 a) [13].

10. <u>Particules ponctuelles monopolaires relativistes</u>.

Supposons que nous voulons décrire en théorie de la relativité des particules ponctuelles simples qui se meuvent dans une variété V_4 donnée et dans un champ $\varphi_A(x)$ donné. Soit $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ l'équation de la ligne d'univers d'une telle particule. Le vecteur unitaire tangent à la ligne d'univers est

$$\dot{z}^\alpha = \frac{dz^\alpha}{ds} = \frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds}$$

où

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dz^\alpha dz^\beta .$$

Supposons que les équations du mouvement d'une telle particule dérivent de l'action [14]

(21) $$W_p = - \int \Lambda\,(\dot{z}^\alpha , \varphi_A(z))ds$$

où Λ est une fonction scalaire dont la forme ne dépend pas du système de coordonnées. Pour appliquer les méthodes habituelles du calcul variationnel, le principe de la moindre action pour (21) doit être écrit comme

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Lambda\,(\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds},\ \varphi_A(z))\frac{ds}{d\lambda}d\lambda = 0\ ,\quad \text{avec } \delta z^\alpha(\lambda_1) = 0 = \delta z^\alpha(\lambda_2).$$

Λ comme fonction de $\dot{z}^\alpha$ est définie seulement sur l'hyperboloïde-unité : $\dot{z}^\alpha\dot{z}_\alpha = 1$. Introduisons la continuation $\tilde{\Lambda}$ de Λ sur un entourage de cet hyperboloïde :

$$\tilde{\Lambda}\,(u^\alpha , \varphi_A(z))\Big|_{u=\dot{z}} = \Lambda\,(\dot{z}^\alpha , \varphi_A(z)) .$$

Pour simplifier la typographie des formules nous écrirons $\Lambda\,(u^\alpha , \varphi_A)$ au lieu de $\tilde{\Lambda}(u^\alpha , \varphi_A)$. Les équations du mouvement sont

(22) $$\Lambda_\alpha\Big|_{u=\dot{z}} = 0$$

où

$$(23) \qquad \Lambda_\alpha \underset{\text{def}}{=} \frac{D}{ds} P_\alpha - \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_A} \nabla_\alpha \varphi_A$$

et

$$(24) \qquad P_\alpha \underset{\text{def}}{=} \left(\Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\beta} u^\beta\right) u_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\alpha} \quad .$$

L'identité de Noether s'écrit

$$(25) \qquad \frac{d}{ds}(p_\alpha \xi^\alpha) \equiv \xi^\alpha \Lambda_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_A} \mathcal{L} \varphi_A + \frac{1}{2}\left(\Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\delta} u^\delta\right) u^\alpha u^\beta \mathcal{L} g_{\alpha\beta} \quad .$$

Si les équations du mouvement (22) sont satisfaites et $\vec{\xi}$ est tel que

$$\mathcal{L} \varphi_A = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L} g_{\alpha\beta} = 0 ,$$

nous avons une loi de conservation

$$p_\alpha \xi^\alpha = \text{constante.}$$

Dans le cas où les symétries constituent un groupe G_ℓ dont les opérateurs infinitésimaux sont

$$X_\lambda = \xi^\alpha_\lambda \partial_\alpha \quad ; \quad \lambda = 1, \dots, \ell \; ; \; \alpha = 0,1,2,3$$

on peut former ℓ constantes du mouvement indépendantes

$$p_\lambda = \text{const., où} \quad p_\lambda = p_\alpha \xi^\alpha_\lambda \quad .$$

Le crochet de Poisson de deux impulsions p_μ et p_ν est

$$\{p_\mu , p_\nu\} = c^\lambda_{\mu\nu} p_\lambda \quad , \quad \mu, \nu, \lambda = 1, \dots, \ell \; ,$$

où les $c^\lambda_{\mu\nu}$ sont les constantes de structure de G_ℓ :

$$X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu = c^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda \quad .$$

<u>Exercice</u> 1. Démontrer l'identité $\Lambda_\alpha u^\alpha \Big|_{u=\dot{z}} \equiv 0$ et établir son origine.

<u>Exercice</u> 2. Démontrer que $\det \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial u^\beta}\right)\Big|_{u=\dot{z}} \neq 0$ à condition que

$$\left(\Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial u^{\alpha}} u^{\alpha}\right)\Big|_{u=\dot{z}} \neq 0 \ .$$

On peut donc localement résoudre l'équation (24) pour u^{α} et obtenir $u^{\alpha} = U^{\alpha}(p,z)$.

Exercice 3. Sous les hypothèses de l'exercice précédent, si

$$H(z,p) \underset{\text{déf}}{=} \left[\tfrac{1}{2}\left(\Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial u^{\delta}} u^{\delta}\right)(g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} - 1)\right]_{u=U} \ ,$$

les équations du mouvement (22) sont équivalentes à

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \frac{dz^{\alpha}}{ds} \ , \ \frac{\partial H}{\partial z^{\alpha}} = - \frac{dp_{\alpha}}{ds} \ , \ H(z,p) = 0 \ .$$

11. Le rôle singulier des équations du mouvement en relativité générale. Il est facile d'écrire formellement les équations pour le système : particules ponctuelles - champ φ - gravitation en relativité générale. Pour le faire, il suffit d'admettre que l'action est donnée par (14) où W est maintenant somme de l'action pour le champ et pour les particules. Dans le cas d'une seule particule on peut écrire

$$W = \int_{\Omega} \left(L - \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda \ \delta \ (x-z)ds\right)dx \ , \tag{26}$$

où L et Λ ont la même signification qu'avant ; $\delta(x)$ est la "fonction" de Dirac en quatre dimensions. Les équations différentielles qui résultent de W doivent donc être interprétées comme des équations aux distributions. Malheureusement, une théorie mathématique satisfaisante de telles équations existe seulement dans le cas linéaire (voir, cependant, [15] et [16]). Les systèmes d'équations qui résultent de (14) sont toujours non-linéaires et c'est pour cela que, pour le moment, on n'y peut attacher qu'une signification formelle.

Les équations du champ φ sont maintenant

(27) $$L^A = j^A$$

où

$$j^A \underset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_A} \delta(x-z)\, ds \quad .$$

En désignant par $T^{\alpha\beta}$ la densité tensorielle de l'énergie-impulsion du système champ-particule,

$$T^{\alpha\beta} = -2\frac{\delta W}{\delta g_{\alpha\beta}} = -2\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} + \int_{-\infty}^{\infty} (\Lambda - \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\delta} u^\delta)\dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta \delta(x-z).ds \quad ,$$

l'identité de Bianchi généralisée s'écrit

$$\nabla_\beta (T_\alpha{}^\beta - (L^A - j^A) F_{A\alpha}{}^{B\beta}\varphi_B) + (L^A - j^A)\nabla_\alpha \varphi_A - \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_\alpha \delta(x-z)ds \equiv 0 \quad .$$

A condition que l'équation (27) soit vérifiée,

$$\nabla_\beta T_\alpha{}^\beta = 0 \iff \Lambda_\alpha = 0 \; .$$

En <u>relativité générale</u>, il s'ensuit de (19) :

$$G^{\alpha\beta} = -8\pi T^{\alpha\beta} \Rightarrow \nabla_\beta T_\alpha{}^\beta = 0$$

et on a le résultat fondamental : les équations du champ gravitationnel (17) avec les équations des champs "physiques" (27) entraînent les équations du mouvement des particules (22). Ceci peut être formulé mathématiquement comme suit : il suffit de rendre l'intégrale d'action (14) stationnaire par rapport aux variations de $g_{\alpha\beta}$ et φ_A pour qu'elle soit aussi stationnaire par variations des lignes d'univers des particules. Il est facile de comprendre la raison de ce fait fort intéressant et important [17], [3], [14], [15]. Il est dû à ce qu'on varie l'action par rapport aux <u>dix</u> composantes du tenseur métrique tandis que seulement <u>six</u> d'entre elles suffisent à déterminer la géométrie.

Pour élaborer ce point, considérons un domaine Ω d'une variété différentiable X_4 rapportée à des coordonnées locales x^α. Soit $g_{\alpha\beta}(x)$ un champ de tenseurs métriques défini sur Ω qui rend stationnaire l'intégrale d'action

$$(28) \qquad -\frac{1}{16\pi}\int_\Omega \sqrt{|g|}\; R\, dx$$

et satisfait à la condition aux limites au bord de Ω,

$$g_{\alpha\beta}\big|_{F\Omega} = \overset{o}{g}_{\alpha\beta} .$$

Si l'application

$$(29\ a) \qquad x^\alpha \longrightarrow \bar{x}^\alpha = f^\alpha(x)$$

transforme biunivoquement Ω sur lui-même et

$$(29\ b) \qquad f^\alpha\big|_{F\Omega} = x^\alpha \ , \qquad \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_{F\Omega} = \delta^\alpha_\beta \ ,$$

le champ $\bar{g}_{\alpha\beta}(x)$ défini sur Ω par

$$(29\ c) \qquad g_{\alpha\beta}(x) = \bar{g}_{\gamma\delta}(\bar{x})\,\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^\beta}$$

satisfait à la même condition aux limites que $g_{\alpha\beta}(x)$ et rend stationnaire l'action (28). Les géométries induites dans Ω par $g_{\alpha\beta}(x)$ et $\bar{g}_{\alpha\beta}(x)$ ne diffèrent que par une transformation ponctuelle. Introduisons en plus une courbe régulière C contenue dans Ω dont les extrémités se trouvent sur $F\Omega$. Soit $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$ l'équation de cette courbe ; on l'interprètera comme la ligne d'univers d'une particule ponctuelle. Pour des raisons de simplicité considérons une particule neutre de masse m ; l'action totale s'écrit

$$(30) \qquad -\frac{1}{16\pi}\int_{\Omega}\sqrt{|g|}\; R\, dx - m \int_{C} ds \; .$$

Soit $g_{\alpha\beta}(x)$ le champ qui rend stationnaire la somme (30). Le champ $\bar{g}_{\alpha\beta}(x)$ défini à partir de $g_{\alpha\beta}(x)$ par (29) donne la même valeur au premier membre de (30) mais l'intégrale $\int_C ds$ dépend de la métrique. (Exemple : comparer les deux métriques plates, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et $ds^2 = dx^2 + x^2 dy^2$ définies sur $\{-1 < x < 1, -\infty < y < \infty\}$ et la longueur de la ligne $x = \frac{1}{2}$, $-1 \leq y \leq 1$ dans les deux cas). Autrement dit, les équations aux variations déterminent non seulement la géométrie de Ω (qui est invariante par $g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}$) mais aussi la manière dont le tenseur métrique est introduit dans Ω . On voit facilement que le changement $g_{\alpha\beta} \to \bar{g}_{\alpha\beta}$ est équivalent à la <u>variation</u> de la ligne C :

$$z^{\alpha}(\lambda) \longrightarrow \bar{z}^{\alpha}(\lambda) \; ;$$

ici les fonctions $\bar{z}^{\alpha}(\lambda)$ sont définies par $f^{\alpha}(\bar{z}) = z^{\alpha}$. Pour satisfaire au postulat que l'action totale (30) soit stationnaire par variations de $g_{\alpha\beta}$ on doit faire deux choses. D'abord il faut choisir une géométrie, c'est-à-dire une classe d'équivalence des champs tensoriels $g_{\alpha\beta}$ définis sur Ω , deux champs appartenant à la même classe si et seulement s'ils peuvent être liés par (29). Ensuite, un $g_{\alpha\beta}$ de cette classe est déterminé par la condition qu'il rende stationnaire l'intégrale

$$- m \int_{C} ds$$

étendue sur une ligne d'univers donnée C. Puisque les changements $g_{\alpha\beta} \to \bar{g}_{\alpha\beta}$ sont équivalents aux variations de la ligne d'univers, il est clair que si l'action est stationnaire par rapport à ces changements, elle est aussi stationnaire par variations $z^{\alpha} \to \bar{z}^{\alpha}$ et ceci entraîne les équations du mouvement (22).

Exercice [18]. En relativité restreinte, déduire les équations du mouvement des particules à partir des équations du champ (27) et des équations $\delta W/\delta g_{\alpha\beta} = 0$ obtenues en variant le champ $g_{\alpha\beta}$ restreint à $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

III. ÉQUATIONS DE HAMILTON

12. Equations de Hamilton dans une théorie régulière du champ. On connaît bien le rôle impostant du formalisme canonique pour la quantification des théories physiques. Originalement, ce formalisme a été établi en mécanique classique pour des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté. Il a été généralisé ensuite pour le cas d'une théorie régulière du champ. Dans la plupart des travaux, les équations de Hamilton pour le champ sont écrites sous une forme non-tensorielle, dépendant d'une façon explicite du système de coordonnées locales. Ce paragraphe est consacré à une formulation géométrique des équations canoniques de Hamilton pour une théorie simple du champ.

Comme au chapitre précédent, nous désignerons par φ_A les composantes naturelles d'un champ de densités tensorielles et par $\mathcal{L}\varphi_A$ les composantes de sa dérivée de Lie par rapport à un champ vectoriel $\vec{\xi}$. Les équations du champ dérivent de l'action

$$W = \int_{\Omega} L(x^{\alpha}, \varphi_A, \varphi_{A_\alpha})dx ,$$

où $\varphi_{A_\alpha} = \partial_\alpha \varphi_A$ et L est une densité scalaire de poids + 1. On suppose que l'espace-temps est une variété différentiable X_4 munie de deux structures géométriques suivantes :

1° une famille d'hypersurfaces Σ dont les équations sont

$$\sigma(x) = \text{constante}.$$

Les hypersurfaces ne s'intersectent pas et sont telles que par chaque point de X_4 passe exactement une hypersurface.

2° une congruence des lignes transversales aux hypersurfaces Σ. Cette congruence définit un champ de vecteurs tangents $\vec{\xi}$ qu'on normalisera de façon que

$$\xi^{\alpha}\sigma_{\alpha} = 1 \qquad \text{où} \qquad \sigma_{\alpha} = \partial_{\alpha}\sigma .$$

Nous supposerons que la théorie est régulière et que les Σ ne sont pas caractéristiques :

$$(1) \qquad \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_{A\alpha}\partial\varphi_{B\beta}}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\right) \neq 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in X_4 .$$

Ces hypothèses assurent que le problème de Cauchy peut être formulé sur chaque Σ et qu'il a une solution localement unique. Comme données de Cauchy on peut prendre les valeurs de φ_A et $\mathcal{L}\varphi_A$ sur Σ [19]. Alternativement, si l'on introduit les "impulsions"

$$\pi^{A} \underset{\text{def}}{=} \pi^{A\alpha}\sigma_{\alpha} \qquad \text{où} \qquad \pi^{A\alpha} = \partial L/\partial\varphi_{A\alpha} ,$$

les deux champs

$$\varphi_A\big|_{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad \pi^{A}\big|_{\Sigma}$$

constituent un système complet de données de Cauchy. Considérons l'intégrale étendue sur Σ .

$$(2) \qquad H = \int_{\Sigma} (\pi^{A}\mathcal{L}\varphi_A - L)\,\xi^{\alpha}\,dS_{\alpha} \qquad (dS_0 = dx^1dx^2dx^3, \text{ etc.}),$$

qui, avec la définition (II,10), peut s'écrire

$$H = \int_{\Sigma} t^{\alpha} dS_{\alpha} \quad .$$

La valeur de cette intégrale est une fonctionnelle de Σ , $\varphi_A|_{\Sigma}$ et $\pi^A|_{\Sigma}$, symboliquement

$$H = H[\Sigma ; \varphi ; \pi] .$$

Soient $\delta\varphi_A$ et $\delta\pi^A$ deux champs définis sur Σ et à support compact. Nous définirons δH comme la partie principale de

$$H[\Sigma ; \varphi + \delta\varphi ; \pi + \delta\pi] - H[\Sigma ; \varphi ; \pi]$$

et l'écrirons comme

$$\delta H = \int_{\Sigma} \left(\frac{\delta H}{\delta\varphi_A} \delta\varphi_A + \frac{\delta H}{\delta\pi^A} \delta\pi^A\right)\xi^{\alpha} dS_{\alpha} \quad ,$$

cette dernière égalité étant la définition de $\delta H/\delta\varphi_A$ et $\delta H/\delta\pi^A$. Un calcul direct, à partir de (2) montre que les équations de Lagrange $L^A = 0$, sont équivalentes aux équations canoniques de Hamilton,

$$\mathcal{L}\varphi_A = \frac{\delta H}{\delta\pi^A} , \qquad \mathcal{L}\pi^A = -\frac{\delta H}{\delta\varphi_A} \quad .$$

Puisque $dS_{[\alpha}\sigma_{\beta]}\big|_{\Sigma} = 0$, on peut écrire

$$\int_{\Sigma} j^{\alpha} dS_{\alpha} = \int_{\Sigma} j^{\beta}\sigma_{\beta}\, \xi^{\alpha} dS_{\alpha}$$

pour tout champ de vecteurs j . Etant donné deux fonctionnelles de Σ , $\varphi_A|_{\Sigma}$ et $\pi^A|_{\Sigma}$ de la forme

$$J = \int_{\Sigma} j^{\alpha} dS_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad K = \int_{\Sigma} k^{\alpha} dS_{\alpha}$$

on définit leur crochet de Poisson comme

$$(4) \qquad \{J,K\} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\delta J}{\delta \varphi_A} \frac{K}{\delta \pi^A} - \frac{\delta J}{\delta \pi^A} \frac{\delta K}{\delta \varphi_A}\right) \xi^{\alpha} dS_{\alpha} \quad .$$

Dans le cas très simple où $j^{\alpha} = j^{\alpha}(\varphi_A, \pi^B)$, il résulte de (3) que [20]

$$(5) \qquad \frac{dJ}{d\sigma} = \{J,H\} \quad .$$

13. Dynamique généralisée de Dirac. La nécessité expérimentale de quantifier le champ électromagnétique et les spéculations concernant la possibilité d'une théorie quantique de la gravitation ont attiré l'attention des physiciens au problème du formalisme canonique pour des théories singulières du champ [3], [21]. Ce sont des théories dont les équations ne satisfont pas à la condition (1) pour aucune hypersurface Σ. Il a été reconnu par Bergmann [3] que, dans tous les cas intéressants, la singularité d'une théorie est liée à son invariance par rapport à un groupe G_{∞} de symétries. Bien que les équations singulières se présentent en premier lieu dans le cas des champs, nous nous restreindrons ici, pour des raisons de simplicité, aux théories singulières à un nombre fini de degrés de liberté [22]. Nous étudierons les équations de Lagrange et de Hamilton pour un modèle mécanique d'une théorie singulière de champ. Afin de donner le formalisme canonique d'une théorie telle que la théorie relativiste de la gravitation, il faudrait adapter la méthode géométrique du paragraphe précédent au cas singulier.

A. Partie géométrique.

Nous considérons un système dynamique dont l'espace des positions est une variété différentiable à n dimensions, Q. Les coordonnées locales d'un point q de Q seront désignées par $q^a = (q^1, \ldots, q^n)$. En outre, nous introduirons un espace fibré X, dont Q est l'espace de base et qui consiste en des vecteurs contravariants et covariants tangents à Q [23],

$$X = \bigcup_{q \in Q} (T_q \oplus T^*_q).$$

Un élément de X est déterminé par un point $q \in Q$, un vecteur contravariant r et un vecteur covariant p, tangents en q et Q. Dans le système de coordonnées induites en X par les coordonnées q^a de Q , les coordonnées d'un point de X sont

$$(q^1, \ldots, q^n, r^1, \ldots, r^n, p_1, \ldots, p_n).$$

<u>L'espace de phase</u> P est l'espace fibré des vecteurs covariants tengents à Q.

Le système mécanique est défini par la fonction de Lagrange L, définie sur X et indépendante de p : $L(q,r)$. Les équations

(6) $$p_a - \frac{\partial L}{\partial r^a} = 0 \quad , \qquad a = 1, \ldots, n$$

définissent une hypersurface à $2n$ dimensions, $\Pi \subset X$. Si $(q,r,p) \in \Pi$, on peut définir la projection de Π sur P par

$$\text{proj}\,(q,r,p) = (q,p) \; .$$

La géométrie de proj Π dépend de L ; nous supposerons que L est une fonction de classe C^3 et que la matrice de Jacobi, $\partial^2 L/\partial r^a \partial r^b$, est de rang $n-m$ $(m = 0,1, \ldots, n)$:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial r^a \partial r^b}\right) = n-m \quad .$$

La projection de Π sur P est, sous ces hypothèses, une variété différentiable à $2n-m$ dimensions. Les équations de cette variété considérée comme sous-variété de P, peuvent être écrites localement comme

(8) $$\varphi_\mu (q,p) = 0 \quad , \qquad \mu = 1, \ldots, m \; ,$$

où les fonctions φ_μ sont régulières et telles que

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_a}\right) = m \quad .$$

La théorie non-singulière correspond à $m = 0$; dans ce cas la projection de Π se confond avec P et les équations (6) peuvent être résolues par rapport à r^a. Dans le cas général, les équations (8) sont appelées les <u>contraintes canoniques (primaires)</u>. En X , elles définissent une variété qui contient Π :

$$\varphi_\mu\left(q, \frac{\partial L}{\partial r}(q,r)\right) \equiv 0 \; .$$

Par différentiation, on en déduit

$$\text{(10 a)} \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^a} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_b} \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial r^b} \equiv 0 \quad ,$$

$$\text{(10 b)} \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_b} \frac{\partial^2 L}{\partial r^a \partial r^b} \equiv 0 \quad .$$

Introduisons sur X la fonction

$$\text{(11)} \qquad G(q,r,p) \underset{\text{def}}{=} p_a r^a - L(q,r)$$

et calculons sa différentielle sur Π .

$$dG\Big|_\Pi = r^a \, dp_a - \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a \quad .$$

Il en résulte que G sur Π ne dépend pas de r et on peut donc trouver une fonction $H(q,p)$, définie sur P (et par extension sur X) et telle que

$$G\Big|_\Pi = H\Big|_\Pi \quad .$$

Puisque la différence $G-H$ est constante sur Π , il doit être possible de trouver des fonctions $f^a(q,r,p)$ telles que

$$d(G-H) = f^a \, d(p_a - \frac{\partial L}{\partial r^a})$$

identiquement sur Π . On en tire

(12) $$r^a - \frac{\partial H}{\partial p_a} = f^a \, , \qquad \frac{\partial L}{\partial q^a} + \frac{\partial H}{\partial q^a} = f^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial r^b}$$

et

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r^a \partial r^b} f^b = 0 \, .$$

De (7), (9), (10 b) et (13) il résulte qu'il existe des fonctions $U^\mu(q,r,p)$ telles que

$$f^a = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_a} U^\mu$$

et les équations (12) deviennent

(14) $$r^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_a} U^\mu \, ,$$

(15) $$\frac{\partial L}{\partial q^a} = - \frac{\partial H}{\partial q^a} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q^a} U^\mu \, .$$

Etant donné un $L(q,r)$ qui satisfait à (7), on peut trouver : m équations de contrainte (8), une fonction de Hamilton $H(q,p)$ et m fonctions $U^\mu(q,r,p)$ telles que les équations (14) et (15) soient satisfaites sur Π . Il est clair que dans le cas général $(m \neq 0)$ ni H ni U^μ ne sont déterminées d'une façon unique par L.

B. Les équations de Lagrange.

Les équations du mouvement qui découlent du lagrangien $L(q,\dot{q})$,

(16) $$L_a = 0$$

où

(17) $$L_a \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} , \qquad \dot{q}^a = dq^a/dt ,$$

peuvent être écrites sous la forme équivalente

(18) $$\dot{q}^a = r^a ,$$

(19) $$\dot{p}^a = \frac{\partial L}{\partial q^a}(q,r) ,$$

(6) $$p_a - \frac{\partial L}{\partial r^a}(q,r) = 0 .$$

Ce sont des équations de premier ordre ; l'ensemble des fonctions $q^a(t)$, $r^a(t)$, $p_a(t)$ qui en est une solution définit une courbe (trajectoire) continue dans Π . Le problème qui se pose au sujet du système (18), (19) et (6) est le suivant : sous quelles conditions et combien a-t-il de solutions correspondans aux données initiales $q^a(0)$, $r^a(0)$, $p_a(0)$? Il faut remarquer que dans le cas singulier les équations du mouvement peuvent n'avoir aucune solution : par exemple, tel est le cas pour le lagrangien $L = q^1$.

Le point initial de la trajectoire, $q^a(0)$, $r^a(0)$, $p_a(0)$, doit nécessairement appartenir à Π ; on peut alors calculer $\dot{q}^a(0)$ et $\dot{p}_a(0)$ à partir de (18) et (19). Pour obtenir $\dot{r}^a(0)$, il faut différentier (6) par rapport à t ; il vient

(20) $$\frac{\partial^2 L}{\partial r^a \partial r^b}\dot{r}^b = - \frac{\partial^2 L}{\partial r^a \partial q^b} r^b + \frac{\partial L}{\partial q^a} .$$

D'après (11 b), pour que cette équation ait une solution, il faut que

(21) $$\psi_\mu(q,r) = 0 ,$$

où

$$\psi_\mu(q,r) \underset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial p_a}\right|_\Pi \cdot \frac{\partial L}{\partial q^a} + \left.\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q^a}\right|_\Pi \cdot r^a \ .$$

Les équations (21) constituent des contraintes nouvelles ; en particulier les données initiales $q(0)$, $r(0)$, $p(0)$ doivent satisfaire à (21). Les contraintes (21) apparaissent dans une formulation purement lagrangienne d'une théorie singulière tandis que les contraintes (8) sont liées au formalisme canonique.

Il se peut que les relations (21) différentiées par rapport à t donnent de nouvelles restrictions pour $\dot{r}^a$; ces équations à leur tour peuvent donner lieu aux contraintes additionnelles pour les q et r. Ce procédé doit être continué jusqu'à ce qu'on aboutisse à un système complet des équations du mouvement et des contraintes, que nous appellerons les contraintes lagrangiennes, ou aux équations contradictoires.

C. Dynamique invariante par rapport à un groupe $G_{\infty m}$.

Afin de pouvoir dire quelque chose de plus précis sur le problème initial pour les équations du mouvement (16) nous ferons des hypothèses additionnelles sur l'origine de la singularité de la matrice $\partial^2 L/\partial r^a \partial r^b$. Nous supposerons que l'action $\int L(q,\dot{q})dt$ est invariante par rapport à un groupe continu $G_{\infty m}$ tel que, dans la notation du premier chapitre,

(22 a) $$\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})dt = \int_{t'_1}^{t'_2} [L(q',\dot{q}') + \dot{K}]dt' \ ,$$

(22 b) $$\delta^* t = \tau_\mu\, a^\mu(t) \ , \qquad \mu = 1,\dots, m \ ,$$

(22 c) $$\delta q^a = \varphi^a_\mu(q,\dot{q})a^\mu(t) - \dot{q}^a\,\delta^* t \ ,$$

(22 d) $$\bar{\delta} K = M_\mu(q,\dot{q})\dot{a}^\mu(t) \ ,$$

(22 e) $$\mathcal{R}(\varphi^a_\mu) = m \quad .$$

Ici, les τ_μ sont des constantes et les fonctions a^μ, φ^a_μ et M_μ dépendent des arguments indiqués. Les hypothèses sur le groupe de symétries ont été choisies de telle façon pour que la dynamique en question puisse être considérée comme un modèle des théories des champs singulières qui se présentent en physique.

De (22) on tire l'identité fondamentale

$$L_a \bar{\delta} q^a + \frac{d}{dt}\left(L\,\delta^* t + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^a}\,\bar{\delta} q^a + \bar{\delta} K\right) \equiv 0 \quad .$$

Les fonctions a^μ étant arbitraires, on en obtient

(23) $$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\,\dot{q}^a\right)\tau_\mu + \varphi^a_\mu L_a \equiv 0 \quad ,$$

(24) $$\frac{d}{dt}\left(\varphi^a_\mu L_a\right) + \tau_\mu \dot{q}^a L_a \equiv 0 \quad .$$

De l'identité de Bianchi généralisée (24) et tire facilement

$$\varphi^b_\mu \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \equiv 0 \quad .$$

Compte tenu de (22 e), on a $\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) \leqslant n-m$. Nous supposerons que

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) = n - m \; .$$

Il en résulte que la théorie admet m contraintes (8) et qu'il existe une matrice non-singulière d'ordre m, soit $N^\nu_\mu(q,\dot{q})$, telle que

$$\varphi^a_\mu = N^\nu_\mu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_a}\bigg|_{p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}} \qquad \mu, \nu = 1, \dots, m.$$

Si l'on tient compte de

$$\psi_\mu(q,\dot{q}) \equiv L_a \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_a}\bigg|_{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}} ,$$

l'identité (24) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}(N_\mu^\nu \psi_\nu) + T_\mu \dot{q}^a L_a \equiv 0 . \tag{25}$$

Cette équation signifie que le système

$$\psi_\mu = 0 , \qquad L_a = 0 \tag{26}$$

est <u>en involution</u> (Cartan) : il suffit de satisfaire $\psi_\mu = 0$ initialement pour qu'il existe une solution de $L_a = 0$ et pour que cette solution satisfasse à $\psi_\mu = 0$ pour tout t. Autrement dit, en différentiant $\psi_\mu = 0$ par rapport à t, on obtient des équations qui sont des conséquences de (26). Ceci est dû à ce que la loi de transformations infinitésimales (22 c) ne contient pas de dérivées de a^μ d'ordre supérieur à un.

D. Equations canoniques.

Dans le cas général, étant donné les contraintes lagrangiennes $\psi_\mu(q,r) = 0,\ldots$ et l'équation de Π , il se peut qu'en éliminant les variables r^a entre ces équations on obtienne des <u>contraintes canoniques secondaires</u>, $\chi_\zeta(q,p) = 0$. Dans le cas spécial de la dynamique invariante par rapport au G_{oom} défini par (22), il est possible de donner la forme précise de χ et d'établir un théorème sur l'équivalence des équations de Lagrange aux équations de Hamilton généralisées.

En effet, de (23) et (11) il résulte

(27) $$N_{\mu}^{\nu}\psi_{\nu} \equiv \tau_{\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{a}}\dot{q}^{a} - L\right)$$

$$\equiv \tau_{\mu} G\left(q,\dot{q},\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \equiv \tau_{\mu} H\left(q,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

et l'équation des contraintes secondaires est

(28) $$\chi_{\mu}(q,p) \underset{def}{=} \tau_{\mu} H(q,p) = 0 \quad .$$

Retournons maintenant au problème des équations de Hamilton pour la dynamique invariante. De ce que nous avons dit au paragraphe précédent et des équations (6) et (14) - (19) il résulte que, étant donné une solution $q^{a}(t)$ du système (26), il existe m fonctions u (t) telles que $q^{a}(t)$ et $p_{a}(t) = \partial L/\partial \dot{q}^{a}$ satisfont à

(29 a) $$\dot{q}^{a} = \frac{\partial H}{\partial p_{a}} + u^{\mu}\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial p_{a}} \quad ,$$

(29 b) $$\dot{p}_{a} = -\frac{\partial H}{\partial q^{a}} - u^{\mu}\frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial q^{a}} \quad ,$$

(29 c) $$\varphi_{\mu}(q,p) = 0, \qquad \chi_{\mu}(q,p) = 0 \ .$$

Nous appellerons <u>l'hypersurface canonique</u> le sous-espace de P défini par les contraintes canoniques (29 c). Au sujet du système (29) on peut se poser les questions suivantes : a-t-il des solutions ? que peut-on dire sur les $u^{\mu}(t)$? est-il vrai qu'une solution de (29) satisfasse aux équations de Lagrange ? Pour y répondre, il faut tout d'abord vérifier que les contraintes (29 c), différentiées par rapport à t, ne donnent pas de restrictions additionnelles sur $\dot{q}$ et $\dot{p}$. On trouve

$$\dot{\varphi}_\mu = \{\varphi_\mu, H\} + u^\nu \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\} \quad .$$

En différentiant $\psi_\mu(q,r)$ par rapport à r^a il vient

$$\frac{\partial \psi_\mu}{\partial r^a} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_a}\bigg|_\Pi = \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\}\Big|_\Pi$$

et en utilisant (27) et (28) on en tire que

$$\{\varphi_\mu, \varphi_\nu\} = 0$$

sur l'hypersurface canonique. D'une manière analogue on montre que sur cette même hypersurface

$$\{\varphi_\mu, H\} = 0 \ .$$

Il s'ensuit que si l'on donne un point $q^a(0)$, $p_a(0)$ appartenant à l'hypersurface canonique, on peut toujours trouver une solution de (29) qui passe par ce point ; cette solution est déterminée d'une façon unique par $q^a(0)$, $p_a(0)$ et les m fonctions $u^\mu(t)$ qui peuvent être choisies arbitrairement. On peut aussi montrer que les fonctions $q^a(t)$ ainsi obtenues satisfont aux équations lagrangiennes (26). Donc, le système (29) représente une généralisation satisfaisante des équations canoniques de Hamilton.

Exercice [24]. Développer une théorie des transformations canoniques pour la dynamique invariante par rapport à un groupe $G_{\infty m}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN, Théorie des groupes finis et continus, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[2] E. NOETHER, Göttingen Nachr., (1918), 235.
E. BESSEL-HAGEN, Math. Ann., 84 (1921), 258.
E.L. HILL, Revs. Med. Phys., 23 (1951), 253.
A. TRAUTMAN, l'article dans Gravitation, rédigé par L. Witten, John Wiley, New-York, 1962.

[3] P.G. BERGMANN, Phys. Rev., 75 (1949), 680.
" " and R. SCHILLER, Phys. Rev., 89 (1953), 4.
J.N. GOLDBERG, Phys. Rev., 89 (1953), 263.

[4] D. HILBERT, Math. Ann., 92 (1924), 1.
J.S. de WET, Proc. Cambr. Phil. Soc., 43 (1947), 511.
A. TRAUTMAN, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), 675.
M.A. TONNELAT, Conférences données à Rome, 1963.

[5] A. CAPELLA, Thèse, Université de Paris, 1963.

[6] A. EINSTEIN, Physik. Z., 19 (1918), 115.
" " Berlin. Ber., (1918), 448.
F. KLEIN, Göttingen Nachr., (1918), 394.
C. MØLLER, Ann. of Physics, 4 (1958), 347.
A. TRAUTMAN, Bull. Acad. Polon. Sci. sér. sci. math. astr. et phys., 6 (1958), 407.
A. KOMAR, Phys. Rev., 127 (1962), 1411.
C. MISNER, Phys. Rev. 130 (1963), 1590.

[7] A. EINSTEIN, Berlin. Ber., (1915) 778.
" " Ann. Physik, 49 (1916) 769.
W. PAULI, Phys. Z., 20 (1919), 25.
" " Relativitätstheorie, Enzykl. Mathem. Wissen., vol.V, Leipzig 1922.
L. LANDAU et E. LIFSHITZ, The classical theory of fields, Addison-Wesley, Reading, 1951.
J.N. GOLDBERG, Phys. Rev., 111 (1958), 315.

[8] C. MØLLER, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1 (1961), n°10.
J. PLEBAŃSKI, Conférence donnée au Colloque sur les théories relativistes de la gravitation, Varsovie, 1962.

[9] N. ROSEN, Conférence donnée au Colloque sur les théories relativistes de la gravitation, Varsovie, 1962.

[10] A. PAPAPETROU, Proc. Roy. Irish Acad., 52 (1948), 11.

[11] V.A. FOCK, Théorie de l'espace-temps et gravitation, Moscou 1955.
R. ARNOWITT, S. DESER and C.W. MISNER, Phys. Rev., 116 (1959), 1322.
" " " l'article dans Gravitation rédigé par L. Witten, John Wiley, New-York, 1962.
J. RAYSKI, Acta Phys. Polon. 19 (1960), 33 ; 20 (1961), 509.

[12] A. KOMAR, Phys. Rev., 113 (1959), 934.

[13] C. MØLLER, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 31 (1959) n°14.
J. GEHENIAU, l'article dans Les théories relativistes de la gravitation, éd. C.N.R.S., Paris, 1962.

[14] A. TRAUTMAN, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), 721.

[15] L. INFELD and J. PLEBAŃSKI, Motion and Relativity, PWN et Pergamon Press, Warszava 1960.

[16] R. ARNOWITT, S. DESER and C.W. MISNER, Phys. Rev. Letters, 4 (1960) 375.

[17] A. EINSTEIN et J. GROMMER, Berlin. Ber. 1 (1927), 2.
A. EINSTEIN, L. INFELD et B. HOFFMANN, Ann. Math. 39 (1938), 65.
V.A. FOCK, J. Phys. (Moscou) 1 (1939), 81.
A. EINSTEIN et L. INFELD, Can. J. Math. 1 (1949), 209.
A. PAPAPETROU, Proc. Phys. Soc. A 64 (1951), 54.
A. LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, Paris 1955.
C. JANKIEWICZ, Acta Phys. Polon. 18 (1959), 21.
J.N. GOLDBERG, l'article dans Gravitation, rédigé par L. Witten, John Wiley New-York, 1962.

[18] C. JANKIEWICZ, Bull. Acad. Polon. Sc., sér. sci. math. astr. et phys. 7 (1959), 175.

[19] J. STACHEL, The Cauchy problem in general relativity, en préparation.

[20] J.A. SCHOUTEN, Ricci-Calculus, 2nd ed., Springer, Berlin 1954 (p.111).

[21] P.G. BERGMANN and J.H.M. BRUNNINGS, Rev. Mod. Phys. 21 (1949), 480.
A. SCHILD and F.A.E. PIRANI, Phys. Rev. 79 (1950) 986.
J.L. ANDERSON and P.G. BERGMANN, Phys. Rev. 83 (1951), 1018.
J. HELLER and P.G. BERGMANN, Phys. Rev. 84 (1951), 665.
P.G. BERGMANN and I. GOLDBERG, Phys. Rev. 98 (1955), 531, 544.
P.G. BERGMANN, Helv. Phys. Acta Suppl. IV (1956), 79.

[22] P.A.M. DIRAC, Canad. J. Math. 2 (1950), 129 ; 3 (1951), 1.
" Proc. Roy. Soc., A 246 (1958), 326.
B.S. DE WITT, Dynamical Theory in Curved Space II : The Theory of Constraints, University of North Carolina, preprint.

[23] A. LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions, Edizioni Cremonese, Rome 1955.

[24] P.G. BERGMANN, The Special Theory of Relativity, § 39, dans Enc. of Physics, vol. IV, Springer, Berlin, 1962.